Introdução à Teoria dos Números
Aula de Problemas 3.

1. Em que classes de congruência $\mod 8$ estão os quadrados perfeitos? 492601342834923 poderá ser a soma de dois quadrados perfeitos?

2. Mostrar que se
$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_k 10^k$$
então
$$n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k \mod 3, \qquad n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k \mod 11$$

3. Se p_1, p_2, p_3 e q são primos e
$$q = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$
justificar, usando congruências módulo 3, que um dos p_i é 3.
Se $n^2 - 2$ e $n^2 + 2$ são ambos primos, justificar que $3 \mid n$.

4. Determinar as soluções das equações
$$244x \equiv 25 \mod 16; \qquad 183x \equiv 21 \mod 27; \qquad 29x \equiv 10 \mod 31;$$
$$501x \equiv 345 \mod 72; \qquad 110x \equiv 40 \mod 575.$$

5. Justificar que se $ac \equiv bc \mod m$ e $d = mdc(c, m)$, então $a \equiv b \mod m/d$.

6. Mostrar que todo o inteiro da forma $4k + 3$ tem um factor da mesma forma. Deduzir que existem infinitos primos p tais que $p \equiv 3 \mod 4$. Podemos aplicar o mesmo raciocínio para inteiros da forma $4k + 1$? E da forma $6k + 5$?

7. Seja p primo. Notando que para cada $1 < a < p - 1$ existe um (único) $1 < a' < p - 1$ tal que $aa' \equiv 1 \mod p$, demonstrar o Teorema de Wilson:
$$(p-1)! \equiv -1 \mod p$$
se e só se p é primo.
Usar o resultado anterior para mostrar que
$$61! + 1 \equiv 0 \mod 71.$$