Introdução à Teoria dos Números
Aula de Problemas 5.

1. Calcular

   a) o resto da divisão de 2^{81} por 43;

   b) o resto da divisão de 2^{81} por 45;

2. Determinar, justificando, as cinco soluções de $\phi(n) = 20$.

3. Justificar que não existe n tal que $\phi(n) = 14$ e que 14 é o menor inteiro positivo par com essa propriedade.

4. Determinar, ou mostrar que não existem, as soluções $0 < x < 101$ de

$$x^{31} \equiv 3 \mod 101.$$

5. Determinar, ou mostrar que não existem, as soluções $0 < x < 207$ de

$$11x^{31} \equiv 1 \mod 207.$$

   Sugestão: começar por usar o Teorema Chnês dos Restos.

6. Mostrar que se p é um primo diferente de 2 e de 5, então p divide infinitos inteiros do conjunto $\{9, 99, 999, 9999, \cdots\}$. Justificar que p também divide infinitos inteiros do conjunto $\{1, 11, 111, 1111, \cdots\}$.}

7. Usando a factorização $561 = 3 \times 11 \times 17$ mostrar que $a^{561} \equiv a \mod 561$ para todo o inteiro a.

8. Seja m um número natural livre de quadrados, isto é, existem primos p_i (com $1 \leq i \leq k$) tais que se $i \neq j$ então $p_i \neq p_j$ e $m = p_1 p_2 \cdots p_k$. Supondo que $mdc(k, \phi(m)) = 1$, mostrar que a equação

$$x^k \equiv b \mod m$$

   tem uma única solução, mesmo que $mdc(b, m) > 1$.

   Sugestão: usar o Teorema Chinês dos Restos.

9. Dizemos que n é um pseudo-primo para a base 2 se $2^{n-1} \equiv 1 \mod n$ mas n não for primo. Mostrar que n é um pseudo-primo para a base 2, então $2^n - 1$ também o é.
Sugestão: Mostrar que $2^n - 1$ divide $2^{2^n-2} - 1$.