Matemática I - 2017/2018

Exercícios 2

1 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$\lim_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x})$ R: 0

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ R: $-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ R: $\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ R: $\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ R: $\frac{a}{b}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ R: 2

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\sin x)}{(x+\sin x)^2}$ R: $\frac{3}{2}$

2 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$\lim_{x\to +\infty} x\sin^2(x)$ R: não existe

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1000\cos(x^{1000})}{x}$ R: 0

$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ R: $\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$ R: $+\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+4x-7}{x(1-2x)^2}$ R: $\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+\sqrt[3]{x^7+1}+\cos(x^2)}{x^3+\sqrt{x^5+1}+3}$ R: 0

$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x+1}$ R: $-\frac{1}{3}$

3 -Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x|x-2|}{|2x-1|-|x+1|} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x|x-2|}{|2x-1|-|x+1|}$$

R: O primeiro limite é $-\frac{2}{3}$. O segundo não existe: os limites laterais são diferentes

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x|x-2|}{|2x-1|-|x+1|} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(2x-1)-(x+1)} = 2$$

mas

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x|x-2|}{|2x-1|-|x+1|} = \lim_{x\to 2} \frac{x(2-x)}{(2x-1)-(x+1)} = -2$$

4 - Determinar as constantes a e b, de modo a que se verifique

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 8$$

R: Para que o limite seja finito é necessário que o numerador se anule para $x = 3$, ou seja, $9 + 3a + b = 0$; isso implica que $x^2 + ax + b = (x-3)(x-c)$ para algum c; o limite pedido implica então que $3 - c = 8$. Por outro lado, esta factorização implica que $a = -(3+c)$ e $b = 3c$.
Juntando todas estas condições chegamos a $a = 2$ e $b = -15$.

5 - Calcular, ou mostrar que não existem, os limites das sucessões:

$\frac{\sqrt{n^2-1}+(-1)^n n}{2n+3}$	R: não existe	$\frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$	R: $\frac{1}{2}$
$\frac{(3^n+1)^2}{1+7^n}$	R: $+\infty$	$\frac{2^{n+3}+5^{n+1}}{3^{n+2}+5^{n+4}}$	R: $\frac{1}{5^3}$
$\frac{n+(-1)^n(n+1)}{n+\sqrt{n}+1}$	R: não existe	$\frac{n^{2017}+2017^n}{(3n)^{13}+13^{3n}}$	R: 0

6 - Sejam a, b dois reais positivos. Calcular, ou mostrar que não existem, os limites das sucessões:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \qquad \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

R: Os limites dependem da relação entre os valores de a e b:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \begin{cases} a & \text{se } a \geq b \\ b & \text{se } b \geq a \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = \begin{cases} b & \text{se } a < b \\ 1 & \text{se } a = b \\ \frac{1}{a} & \text{se } b < a \end{cases}$$