Matemática I - 2017/2018

Exercícios 5

1 - Determinar uma função $F(x)$ satisfazendo as condições

$$F'(x) = \frac{x}{2x^2+3}, \qquad F(0) = 0$$

Solução : $F(x) = \frac{\ln(2x^2+3)}{4} - \frac{\ln(3)}{4}$.

2 - a) Dados $a \neq b$ encontrar A e B tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

b) Dados $a \neq b$ encontrar A e B tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

c) Usar as alíneas anteriores para calcular primitivas das funções

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1}, \qquad g(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+4}$$

d) Dados $a \neq b$ encontrar A, B e C tais que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{Ax+B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}.$$

e) Usar a alínea anterior para calcular uma primitiva de

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}$$

Solução : a) $\frac{A}{x-a)} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x-(bA+aB)}{(x-a)(x-b)}$.
Para termos a igualdade pretendida, as constantes A e B têm que satisfazer

$$\begin{cases} A+B=0 \\ bA+aB=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{a-b} \\ B = \frac{1}{b-a} \end{cases}$$

b) O raciocínio é o mesmo mas com o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=1 \\ bA+aB=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{a}{a-b} \\ B=\frac{b}{b-a} \end{array}\right.$$

c)

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$$

que tem primitiva $F(x)=\frac{\ln(|x-1|)}{2}-\frac{\ln(|x+1|}{2}$.

Como $x^2-4x+4=(x-2)^2$, temos

$$g(x)=\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{2(x-2)+7}{(x-2)^2}=\frac{2}{x-2}+\frac{7}{(x-2)^2}$$

Cada uma das parcelas pode ser primitivada directamente:

d) Seguindo o raciocínio feito nas alíneas a) e b)

$$\frac{Ax+B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}=\frac{(Ax+B)(x-b)+C(x-a)^2}{(x-a)^2(x-b)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(B-bA-2aC)x+a^2C-bB}{(x-a)^2(x-b)}.$$

As constantes tm portanto que satisfazer o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} A+C=0 \\ -bA+B-2aC=0 \\ -bB+a^2C=1 \end{array}\right. .$$

Substituindo A por $-C$ na segunda equação e resolvendo depois o sistema de duas equações para B e C, obtemos

$$A=-\frac{1}{(b-a)^2} \qquad \frac{2a-b}{(b-a)^2} \qquad C=\frac{1}{(b-a)^2}.$$

e) Notamos primeiro que

$$\frac{x}{(x-1)(x^2-1)}=\frac{x}{(x-1)^2(x+1)}.$$

A solução passa por uma adaptação do cálculo feito em d), uma vez que o numerador é x e não 1: Para que

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - 2C = 1 \\ B + C = 0 \end{cases} .$$

que tem solução $A = B = -C = 1/4$.

Portanto

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{x+1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)} \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{(x-1)+2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{4} \left(\ln(|x-1|) - \frac{2}{x-1} - \ln(|x+1|) \right)$$

3 - Usar primitivação por partes para calcular primitivas das funções

$$f(x) = x^2 \cos(x), \qquad g(x) = x \ln(x),$$

$$h(x) = (x+1)e^x, \qquad u(x) = x^2 e^x$$

Solução : -

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x)\, dx =$$

$$= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \int \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x);$$

$$\int x \ln(x)\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4};$$

$$\int (x+1)e^x\, dx = (x+1)e^x - \int e^x\, dx = xe^x;$$

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx = x^2 e^x - 2 \left(xe^x - \int e^x\, dx \right) = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right);$$

4 - Usando a substituição $t = \sqrt{x+1}$ calcular uma primitiva das funções

$$f(x) = x\sqrt{x+1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$$

Solução : A substituiçãindicada é equivalente a $x = u(t) = t^2 - 1$. Calculamos a primitiva

$$\int f(u(t))u'(t)\,dt = \int (t^2-1)t2t\,dt = 2\int t^4 - t^2\,dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}.$$

Portanto

$$\int f(x)\,dx = \frac{(2\sqrt{x+1}^5}{5} - \frac{2\sqrt{x+1}^3}{3}.$$

De modo semelhante

$$\int g(u(t))u'(t)\,dt = \int \frac{2t}{(t^2-1)t}\,dt = 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt = \ln(|t-1|) - \ln(|t+1|).$$

Portanto

$$\int g(x)\,dx = \ln(|\sqrt{x+1}-1|) - \ln(|\sqrt{x+1}+1|).$$

5 - Calcular a área da região do plano limitada pela elipse de equação

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Solução : Para simplificar a apresentação dos cálculos, vamos calcular a área da parte da região limitada pela elipse no primeiro quadrante do plano. Essa área é dada por

$$\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx.$$

Usamos a substituição $x = u(t) = 2\sin(t)$ que transforma o intervalo $[0, \pi/2]$ no intervalo $[0, 2]$.
A fórmula de integração por mudança de variável implica

$$\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt.$$

Como $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, a área é dada portanto

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

e portanto a área limitada pela elipse é 2π.
Mais geralmente, se a elipse tem semi-eixos a e b (ou seja, tem equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), a área é $ab\pi$.

6 - a) Seja A a região do plano limitada pelas linhas $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$. Calcular o volume dos sólidos de revolução gerados por A em torno do eixo $y = 0$ e do eixo $x = 0$.
b) Resolver o mesmo problema para a região limitada pelas linhas $y = 0$, $x = 1/2$, $x = 2$ e $y = \frac{1}{x^c}$ onde c é um parâmetro positivo.

Solução : a) Para o primeiro caso (eixo de revolução $y = 0$) a fórmula do volume dá

$$\int_0^2 \pi x^4\,dx = \frac{2^5\pi}{5}.$$

No caso do eixo $x = 0$, a mesma fórmula dá

$$\int_0^4 \pi(4 - (\sqrt{y})^2)\,dy = \int_0^4 \pi(4-y)\,dy = \pi\left[-\frac{(4-y)^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi.$$

A outra fórmula para o volume de sólidos de revolução (por integração de áreas de supercíes cilíndricas centradas no eixo de revolução) daria, por exemplo, neste segundo caso

$$\int_0^2 2\pi x x^2\,dx = 2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$

b) em torno do eixo $y = 0$, o volume é igual a

$$\int_{1/2}^2 \pi\frac{1}{x^{2c}}\,dx.$$

Se $2c \neq 1$, o resultado é

$$\pi\left[\frac{1-2c}{x^{2c-1}}\right]_{1/2}^2 = (1-2c)\pi(\frac{1}{2^{2c-1}} - 2^{2c-1}).$$

Se $c = 1/2$ obtemos

$$\pi \left[\ln(x)\right]_{1/2}^{2} = \pi(\ln(2) - \ln(1/2)) = 2\pi \ln(2).$$

Relativamente ao eixo $x = 0$, usando a fórmula baseada na áreas transversais ao eixo de revolução, teríamos

$$\int_0^{2^{-c}} \pi(4 - 1/4)\, dy + \int_{2^{-c}}^{2^c} \pi(y^{-2/c} - 1/4)\, dy.$$

Se em vez disso usarmos a outra fórmula, obtemos

$$\int_{1/2}^{2} 2\pi x \frac{1}{x^c}\, dx = 2\pi \int_{1/2}^{2} x^{1-c}\, dx.$$

Se $c \neq 2$ o resultado é

$$2\pi \left[\frac{x^{2-c}}{2-c}\right]_{1/2}^{2}$$

enquanto que para $c = 2$ é

$$2\pi \left[\ln(x)\right]_{1/2}^{2}.$$

7 - Um veículo inicia a sua marcha rectilínea, no instante $t = 0$, mantendo uma aceleração constante de $2,6m/s^2$ até percorrer $120m$; a partir desse ponto, desacelera à razão de $-1,5m/s^2$ até atingir, no instante $t = t_0$, a velocidade de $12m/s$.
Determinar t_0 e a distância percorrida até esse instante.

Solução : O movimento descrito faz-se em duas partes: entre $t = 0$ e $t = t_1$ (onde t_1 tem que ser determinado) temos aceleraccão uniforme de $2.6m/s^2$; entre $t = t_1$ e $t = t_0$ a aceleração é $-1.5m/s^2$. Portanto, na pimeira parte, a velocidade é $v(t) = 2.6t$ (o veículo parte do repouso) e a distância percorrida é $d(t) = 1.3t^2$. Como esta fase do movimento termina quando são percorridos $120m$, verificamos que $120 = 1.3t_1^2$ ou seja $t_1 = \sqrt{\frac{120}{1.3}}$ (aproximadamente 9.6073).
Na segunda parte do movimento a função velocidade é $v(t) = v_1 - 1.5(t - t_1)$, onde v_1 é a velocidade no instante t_1, ou seja, $v_1 = 2.6t_1$ e $v(t) = 4.1t_1 - 1.5t$. O instante t_0 em que se atinge a velocidade de $12m/s$ é portanto

$$t_0 = \frac{4.1t_1 - 12}{1.5}$$

(aproximadamente $t_0 = 18.26$).
Em consequência, nessa parte do movimento, a distância percorrida é dada por

$$d(t) = 120 + 4.1 t_1 t - 1.5 \frac{t^2}{2};$$

A distância percorrida até ao instante t_0 calcula-se a partir desta expressão:

$$d = 120 + 4.1 t_1 t_0 - 1.5 \frac{t_0^2}{2}.$$