Matemática I - 2017/2018

Exercícios 6

1 - Usar o método de Gauss para resolver os sistemas de equações seguintes. Em cada caso, representar o problema e as soluções (quando existem) usando matrizes e vectores.

$$a)\ \begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + y = 1 \\ -x + y + z = 4 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 4y - z = 20 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + z = 5 \\ x + y - z = 10 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + z + w = 5 \\ y - w = -1 \\ 3x - z - w = 0 \\ 4x + y + 2z + w = 9 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y = 0 \\ y + 2z = 7 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} 3x + z = 7 \\ x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 5z = -1 \end{cases}$$

2 - Para que valores de a é que o sistema seguinte tem solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução?

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = a \end{cases}$$

3 - Que condições têm que satisfazer as constantes a_i para que os sistemas seguintes tenham (pelo menos uma) solução?

$$a)\ \begin{cases} x - 3y = b_1 \\ 3x + y = b_2 \\ x + 7y = b_3 \\ 2x + 4y = b_4 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2 \\ x_1 + 8x_3 = b_3 \end{cases}$$

4 - Determinar as constantes a, b e c de modo a que o gráfico de

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

contenha os pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ e $(2, 3)$.
Determinar todas as funções daquela forma que contêm os dois primeiros pontos.

5 - A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem segunda derivada $f''(x) = 4$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determinar a primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que satisfaz as condições

$$F(-1) = -1, \qquad F(0) = 2, \qquad F(1) = 1.$$

6 - Determinar todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem as condições

$$f(\pi) = f(-\pi) = 0$$

e $f'''(x) = \cos(\frac{x}{2})$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

7 - Justificar que dados quaisquer 5 pontos (x_i, y_i) (com $1 \leq i \leq 5$) do plano existe uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

de que eles são solução.