Aulas Práticas de Matemática I

Curso de Arquitectura
Resumo da Matéria com exercícios propostos e resolvidos

Henrique Oliveira e João Ferreira Alves

Conteúdo

1 Nota introdutória

Neste breve texto o aluno pode encontrar os exercícios para as práticas de Matemática I do Mestrado em Arquitectura. Estão previstas 13 aulas práticas de 90 minutos, usualmente devido a diversos condicionalismos como feriados, visitas de estudo, apenas se têm dado 12 aulas. Como tal costumamos distribuir o programa por 12 aulas podendo reservar a última para alguns exercícios de exame e revisões.

Os capítulos podem ter a seguinte distribuição, que temos seguido com pequenas variantes:

Capítulo 1 - 1 aula
Capítulo 2 - 1 aula
Capítulo 3 - 1 aula
Capítulo 4 - 2 aulas
Capítulo 5 - 2 aulas
Capítulo 6 - 2 aulas
Capítulo 7 - 1 aula
Capítulo 8 - 2 aulas

A seguir a cada unidade de exercícios propostos, correspondente a uma parte do programa, estão as soluções da maioria dos problemas propostos. O estudante pode encontrar também exercícios de testes ou exames que servem para revisão no final de de cada capítulo e estão, na sua quase totalidade, resolvidos. No final das folhas estão dois testes tipo que cobrem a matéria dada em Matematica I.

2 Sistemas de equações lineares e método de Gauss

2.1 Exercícios propostos

1) Resolva por eliminação de Gauss e descreva geometricamente o conjunto de soluções dos sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+5y=1 \\ 12x+15y=0 \end{cases}$

d) $3x-9y+z=3$ e) $\begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ x+2y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+7y+7z=3 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 4x+10y+10z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 6x+3y+3z=3 \end{cases}$

2) Resolva os sistemas por eliminação de Gauss

$$\text{a)} \begin{cases} 2x+y+z+w=1 \\ 2x+y-z+w=3 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x+2y+2z+3w=3 \\ x+y+z+w=1 \\ 3x+3y+3z+2w=2 \end{cases}.$$

3) Discuta, em função dos parâmetros α e β, os seguintes sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y-2z=10 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x+y+z=-6\beta \\ \alpha x+3y+2z=2\beta \\ 2x+y+(\alpha+1)\,z=4 \end{cases}.$$

4) Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+3z=b_1 \\ 2x+2y-z=b_2 \\ 4x+4y+5z=b_3 \end{cases},$$

e calcule os vectores $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ para os quais o sistema é possível.

5) Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:

a) $S = \{(1+t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$;
b) $S = \{(t, 1-2t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$;
c) $S = \{(s-3t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$;

6) Considere o plano $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $(1,0,0)$, $(-4,1,1)$ e $(-1,1,0)$, e a recta $r \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $(0,0,0)$ e $(-4,0,2)$. Determine a intersecção de α com r.

7) Considere a recta $r \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $(2,0,0)$ e $(1,1,0)$, e a recta $s \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $(0,2,1)$ e $(1,2,2)$. Identifique o único plano $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ que contém r e não intersecta s.

Soluções

1a) Possível e determinado: $S = \{(3,-1)\}$; 1b) Indeterminado com 1 incógnita livre: $S = \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}y, y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}$; 1c) Impossível $S = \varnothing$; 1d) Indeterminado com 2 incógnitas livres: $S = \left\{\left(1 + 3y - \frac{1}{3}z, y, z\right) : y, z \in \mathbb{R}\right\}$; 1e) Possível e determinado: $S = \{(-1,0,1)\}$; 1f) Impossível: $S = \varnothing$; 1g) Indeterminado com 1 incógnita livre: $S = \{(5z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$; 1h) Indeterminado com 1 incógnita livre: $S = \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$; 1i) Indeterminado com 2 incógnitas livres: $S = \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, y, z\right) : y, z \in \mathbb{R}\right\}$.

2a) Indeterminado com duas incógnitas livres:

$$S = \left\{\left(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}w, y, -1, w\right) : y, w \in \mathbb{R}\right\}.$$

2b) Indeterminado com duas incógnitas livres:

$$S = \{(-y-z, y, z, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

3a) Se $\alpha \neq 11$ o sistema é possível e determinado; se $\alpha = 11$ e $\beta = 20$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 11$ e $\beta \neq 20$ o sistema é impossível. 3b) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 6$ o sistema é possível e determinado; se $\alpha = 0$ e $\beta = -2/3$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 0$ e $\beta \neq -2/3$ o sistema é impossível; se $\alpha = 6$ e $\beta = -2/63$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 6$ e $\beta \neq -2/63$ o sistema é impossível.

4) $b_3 - 2b_1 - b_2 = 0$.

5a) $x + y = 2$; 5b) $\left\{\begin{array}{c} 2x + y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$; 5c) $x - y + 3z = 0$.

2.2 Exercícios complementares

1. Resolva por eliminação de Gauss e descreva geometricamente o conjunto de soluções dos sistemas em $\mathbb{R}^3$:

   (a)
$$\begin{cases} x+2y+z=-2 \\ x+y+z=0 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$$

   Res.: Realiza-se a eliminação de Gauss na matriz aumentada do sistema:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right] \rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$
   O sistema fica:
$$\begin{cases} x+2y+z=-2 \\ -y=2 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}.$$

   A solução é o ponto $(1,-2,1)$.

   (b)
$$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

   Res.: Realiza-se a eliminação de Gauss na matriz aumentada do sistema:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$
   Existem dois pivots no final do método de Gauss, a característica da matriz do sistema é 2. O sistema é indeterminado com 1 grau de liberdade (uma variável livre) que corresponde à coluna sem pivot, a coluna da variável y, que é assim a variável livre ou independente:

$$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ -z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ \boxed{y=y} \\ z=0 \end{cases},$$

escrito de outra forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R} : (x, y, z) = (-1, 1, 0)\,\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$, a solução é a recta de vector director $(-1, 1, 0)$ e que passa pela origem.

2. Resolva por eliminação de Gauss e descreva geometricamente o conjunto de soluções dos sistemas em $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$

R.: $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) + t\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),\ t \in \mathbb{R}$.

A solução geometricamente é uma recta.

3. Resolva por eliminação de Gauss e descreva geometricamente o conjunto de soluções dos sistemas em $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 2 \end{array} \right.$$

R.: $(x, y, z) = (0, 2, 0) + t\,(-1, 2, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

A solução geometricamente é uma recta.

4. Discuta, em função dos parâmetros reais α e β, o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + 2z = -\beta \\ \alpha x + 4y + 2z = 2\beta \\ 2x + y + \alpha z = 4 \end{array} \right. .$$

Res.: Realiza-se a eliminação de Gauss na matriz aumentada do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -\beta \\ \alpha & 4 & 2 & 2\beta \\ 2 & 1 & \alpha & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -\beta \\ 0 & 4 - \frac{\alpha}{2} & 2 - \alpha & 2\beta + \frac{\alpha\beta}{2} \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & 4 + \beta \end{array} \right].$$

Se não faltarem pivots ($car\,(A) = 3 = \sharp\,\mathrm{col}\,(A)$) no final do método de Gauss, o sistema é possível e determinado. Logo, se

$$4 - \frac{\alpha}{2} \neq 0 \wedge \alpha - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 8 \wedge \alpha \neq 2,$$

o sistema é possível e determinado.

Na situação em que $\alpha = 2$, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -\beta \\ 0 & 3 & 0 & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 4+\beta \end{array}\right],$$

se $4 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -4$, o sistema fica possível; recorda-se que a condição de existência de solução - ou possibilidade da solução - é $car\,(A) = car\,(A|\,b)$ que é 2 neste caso; mas indeterminado, uma vez que $\sharp\,\mathrm{col}\,(A) = 3 > car\,(A) = 2$, o que nos dá um grau de indeterminação de 1. Se $\beta \neq -4$ o sistema fica impossível, uma vez que $car\,(A) = 2 < car\,(A|\,b) = 3$.

Na situação em que $\alpha = 8$, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -\beta \\ 0 & 0 & -6 & 6\beta \\ 0 & 0 & 6 & 4+\beta \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -\beta \\ 0 & 0 & -6 & 6\beta \\ 0 & 0 & 0 & 4+7\beta \end{array}\right],$$

se $4 + 7\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{4}{7}$, o sistema fica possível; recorda-se de novo que a condição de existência de solução - ou possibilidade da solução - é $car\,(A) = car\,(A|\,b)$ que é 2 neste caso; mas indeterminado, uma vez que $\sharp\,\mathrm{col}\,(A) = 3 > car\,(A) = 2$, o que nos dá um grau de indeterminação de 1. Se $\beta \neq -\frac{4}{7}$ o sistema fica impossível, uma vez que $car\,(A) = 2 < car\,(A|\,b) = 3$.

5. Discuta, em função dos parâmetros reais α e β, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2\beta \\ \alpha x + y + z = \beta \\ 2x + 2y + \alpha z = 1 \end{cases}.$$

Res.: Faz-se a eliminação de Gauss, resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & \beta - \alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & 1 - 2\beta \end{array}\right]$$

Se $\alpha \neq 1, 2$ existem três pivots na matriz (característica da matriz do sistema e da matriz aumentada é 3, que é o número de incógnitas do sistema) do sistema e este fica possível e determinado. No caso $\alpha = 1$ para todo o β, (a característica da matriz do sistema e da matriz aumentada do sistema fica igual e vale 2) o sistema fica indeterminado com grau de indeterminação 1. No caso $\alpha = 2$ e $\beta = \frac{1}{2}$, (a característica da matriz do sistema e da matriz aumentada do sistema fica igual e vale 2) o sistema fica indeterminado com grau de indeterminação 1, se $\alpha = 2$ e $\beta \neq \frac{1}{2}$ o sistema fica impossível.

6. Considere o sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + 2z = b_1 \\ 2x - y + z = b_2 \\ 4x + y + 3z = b_3 \end{array} \right. ,$$

e calcule os vectores $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ para os quais o sistema é possível. Qual é o significado geométrico?

Res.: Realiza-se a eliminação de Gauss na matriz aumentada do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 2 & -1 & 1 & b_2 \\ 4 & 1 & 3 & b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -3 & -5 & b_3 - 4b_1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2b_1 - b_2 + b_3 \end{array}\right],$$

o sistema é sempre possível porque a característica de A é igual à característica da matriz aumentada $A\,|b$ e vale 3. Todos os parâmetros são admissíveis, o espaço dos parâmetros é $\mathbb{R}^3$.

7. (2 val.) Considere o plano $s \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $(1, 0, 1)$, $(3, 1, 1)$ e $(1, 0, -1)$, e a recta $r \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $(0, 0, 0)$ e $(1, 0, 3)$. Determine a intersecção de s com r.

Res.: O plano passa pelo ponto $p_1 = (1, 0, 1)$ e contém os vectores $\overrightarrow{a} = (3, 1, 1) - (1, 0, 1) = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{b} = (3, 1, 1) - (1, 0, -1) = (2, 1, 2)$. A equação vectorial do plano é $\overrightarrow{r} = p_1 + s\,\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}$, $s, t \in \mathbb{R}$. Ou seja

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

eliminando s e t obtemos a equação do plano $x - 2y = 1$, a equação vectorial da recta é $(x, y, z) = \alpha (1, 0, 3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, de onde resulta a equação cartesiana da recta

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 3\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x - z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. .$$

A intersecção é dada por

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 2y = 1 \\ 3x - z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{array} \right. .$$

Poder-se-ia obter este resultado imediatamente observando que o plano $x-2y = 1$, contém o ponto $(1, 0, 3)$ que serve para definir a recta dada.

3 Matrizes

3.1 Exercícios propostos

1) Sempre que possível calcule

a) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ k) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ l) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$.

2) Calcule a 2^a linha e a 1^a coluna do seguinte produto matricial

$$\begin{bmatrix} 113 & 12 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 27 & 25 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 146 & 31 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

3) Mostre que para qualquer matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

4) Mostre que para quaisquer $b \in \mathbb{R}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b\,a_{21} & b\,a_{22} & b\,a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

5) Mostre que para quaisquer $b \in \mathbb{R}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b\, a_{11} & a_{22} + b\, a_{12} & a_{23} + b\, a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

6) Mostre que a inversa de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ quando existe é única.

7) Mostre que se as matrizes A e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são invertíveis, então também AB é invertível, tendo-se ainda $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8) Mostre que qualquer matriz elementar é invertível.

Nota - Recorde que as matrizes dos exercícios 3, 4 (se $b \neq 0$) e 5 são exemplos de matrizes elementares.

9) Sempre que possível, calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{g)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{h)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10) Utilizando o exercício anterior, resolva os sistemas de equações lineares:

$$\text{a)} \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + z = 1 \\ y + w = 1 \\ x + 2z + w = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Soluções

1a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 22 & 5 \end{bmatrix}$; 1b) Não é possível; 1c) Não é possível; 1d) [4]; 1e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;
1f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 1g) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; 1h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; 1i) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$; 1j) $\begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ 30 & 4 \end{bmatrix}$;
1k) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 6 & 60 \end{bmatrix}$; 1l) $\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 62 & 28 \end{bmatrix}$.

2a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$;

9a) Matriz não invertível; 9b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; 9c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$;

9d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; 9e) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; 9f) Matriz não invertível;

9g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 9h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10a) $(0, 0, -1)$; 10b) $(4, 0, -3, 1)$.

3.2 Exercícios complementares

1. Pelo método de Gauss-Jordan calcule a inversa da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Res.:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 1 & 3 & & 1 & \\ 0 & -1 & 1 & & & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

A inversa da matriz dada é $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Utilizando o resultado da questão anterior resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 500 \\ x + y + 3z = 1000 \\ -y + z = 2000 \end{cases}.$$

Res.: Basta multiplicar a inversa pelo vector coluna dos termos independentes:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ -1500 \\ 500 \end{bmatrix}.$$

3. Calcule a inversa da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Calcule a inversa da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Prove que a inversa de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, quando existe, é única.

   Res.: Basta considerar que existem duas inversas A_1^{-1} e A_2^{-1} o que conduz a uma contradição. Por definição vale

$$\begin{aligned} AA_1^{-1} &= Id, \\ A_2^{-1}A &= Id. \end{aligned}$$

   Seja agora o produto $A_2^{-1}AA_1^{-1}$ este produto pode ser realizado utilizando de duas formas a propriedade associativa da multiplicação de matrizes:

$$A_2^{-1}\left(AA_1^{-1}\right) = A_2^{-1}Id = A_2^{-1},$$

   o mesmo produto vale

$$\left(A_2^{-1}A\right)A_1^{-1} = IdA_1^{-1} = A_1^{-1},$$

   o que significa que $A_1^{-1} = A_2^{-1}$ o que contradiz que as duas inversas são diferentes. Logo a inversa de uma matriz é única.

6. Seja A uma matriz quadrada. Dizemos que A é uma matriz nilpotente se existe um inteiro positivo r tal que $A^r = 0$. Prove que se A é nilpotente então $I - A$ é invertível (I representa a matriz identidade).

   Resposta: Basta notar que

   $(I - A)\left(I + A + A^2 + \ldots + A^{r-1}\right) =$

$$\begin{aligned} &= I + A + A^2 + \ldots A^{r-1} - A - A^2 - A^3 - \ldots - A^{r-1} - A^r \\ &= I + A^r = I + 0 = I, \end{aligned}$$

   de onde se conclui que $I - A$ tem inversa e que esta é

$$I + A + A^2 + \ldots + A^{r-1} = \sum_{j=0}^{r-1} A^j.$$

4 Determinantes

4.1 Exercícios propostos

1) Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e indentifique as que são invertíveis

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcule:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

3) Sabendo que os valores reais γ e δ são tais que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \gamma+\delta & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma + \delta^2 & 2\delta \\ \delta\gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix}.$$

4) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule: a) $\det(3A)$; b) $\det(A^3B^2)$; c) $\det(A^{-1}B^T)$; d) $\det(A^4B^{-2})$.

5) Mostre que

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

6) Calcule o determinante da matriz

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

7) Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1).$$

8) Recorra à regra de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes:

$$a)\begin{bmatrix}1&0&3\\1&3&1\\0&0&-3\end{bmatrix}\qquad b)\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&1\\1&6&0\end{bmatrix}\qquad c)\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&1\\5&6&-3\end{bmatrix}$$

$$d)\begin{bmatrix}1&2&4&3\\1&1&3&3\\0&3&0&0\\0&2&2&2\end{bmatrix}\quad e)\begin{bmatrix}1&0&0&3\\1&1&0&3\\0&0&1&1\\-5&2&2&2\end{bmatrix}\quad f)\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&4&0&6&0\\1&1&0&3&0\\0&3&1&1&3\\0&0&0&2&5\end{bmatrix}.$$

9) Calcular a matriz dos cofactores e a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$a)\begin{bmatrix}0&1&2\\2&4&1\\1&2&0\end{bmatrix}\quad b)\begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}\quad c)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&3&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

10) Usar a regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares:

$$a)\begin{cases}y+2z=1\\2x+4y+z=0\\x+2y=1\end{cases}\quad b)\begin{cases}x+y=1\\2x+z=1\\x+2y+2z=-1\end{cases}.$$

Soluções

1a)-3;1b) 0;1c) 9;1d) 1;1e) 30; 1f) 0; 1g) 3;1h) 0; 1i) 18. Apenas as matrizes das alíneas b), f) e h) não são invertíveis.

2a) 5; 2b) 10; 2c) 5; 2d) 10.

3) $-\delta\gamma$.

4a) -54; 4b)-128; c) -2; d) 1.

6) λ^n.

8a) -9; 8b) -5; 8c) 16; 8d) 6; 8e) 15; 8f) -45.

9a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$; 9b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; 9c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

10a) $(-9, 5, -2)$; 10b) $(1, 0, -1)$.

4.2 Exercícios complementares

1. Seja A_λ a seguinte matriz

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Calcule $\det A_\lambda$.

R.: $-1 + 2\lambda^2 - \lambda^3$.

2. Seja A_λ a seguinte matriz

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Calcule $\det A_\lambda$.

R.: $1 - 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3$.

3. Calcule α real de forma a que a seguinte matriz seja singular (não tenha inversa)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ \alpha & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Res.: Basta notar que o determinante da matriz se anula quando a matriz não tem inversa; assim, ao adicionarmos a coluna 1 com a coluna 3 ficamos com a coluna 2 se $\alpha + 2 = 4$, de onde se conclui que se $\alpha = 2$ o determinante é nulo e, logo, a matriz não tem inversa.

4. Calcule a matriz dos cofactores e a inversa da matriz seguinte

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Res.: A matriz dos cofactores é

$$\left[\begin{array}{ccc} 4.1-2.1 & -(2.1-(-1).1) & 2.2-4(-1) \\ -(1.1-2.1) & -1.1-(-1).1 & -(1) \\ 1.1-4.1 & -(-1.1-2.1) & -1.4-2.1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

o determinante da matriz é 3, como se constata multiplicando qualquer linha (ou coluna) pela sua correspondente na matriz dos cofactores. A inversa é simplesmente a matriz dos cofactores transposta a dividir pelo determinante

$$A^{-1} = \frac{cof^T(A)}{\det A} = \frac{1}{3}\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -6 \end{array}\right].$$

5. (2 val.) Use a regra de Cramer para resolver o sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$:

$$\text{a)} \left\{\begin{array}{l} -x+y+z=2 \\ 2x+4y+z=-4 \\ -x+2y+z=2 \end{array}\right. .$$

Res.: Aproveitando o problema anterior, notando que a matriz do sistema é a mesma, podemos calcular facilmente todos os determinantes, já se sabe que $\det A = 3$.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right|}{3} = -2,$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right|}{3} = 0,$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right|}{3} = 0.$$

6. Prove que

$$B = \det\left[\begin{array}{ccccc} \lambda a_1 & \lambda a_1 & \lambda a_1 & ... & \lambda a_1 \\ a_2^2 & \lambda a_2 + a_2^2 & a_2^2 & ... & a_2^2 \\ a_3^2 & a_3^2 & \lambda a_3 + a_3^2 & ... & a_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^2 & a_n^2 & a_n^2 & ... & \lambda a_n + a_n^2 \end{array}\right] = \lambda^n \prod_{j=1}^{n} a_j,$$

(a_j e λ são números reais).

Res.: Pode-se pôr em evidência por cada linha o a_j e o λ da primeira linha, ficamos com:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ a_2 & \lambda + a_2 & a_2 & ... & a_2 \\ a_3 & a_3 & \lambda + a_3 & ... & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & ... & \lambda + a_n \end{vmatrix} \lambda \prod_{j=1}^{n} a_j.$$

Pode-se utilizar a primeira linha para eliminar, pelo método de Gauss, em cada linha j os a_j com $j \geq 2$. Ficamos com

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{vmatrix} \lambda \prod_{j=1}^{n} a_j.$$

o que dá imediatamente o resultado.

5 Espaços vectoriais

5.1 Exercícios propostos

1) Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano, identificando os que são subespaços lineares de $\mathbb{R}^2$:

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$;
b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$;
c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \text{ e } x - y = 0\}$;
d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$;
e) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

2) Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do espaço, identificando os que são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$:

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$;
b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$
c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$;
d) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$;
e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
f) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

3) Considere em $\mathbb{R}^2$ o conjunto $S = \{(1,1), (2,2)\}$.

a) Mostre que o vector $(-5,-5)$ é combinação linear dos vectores de S.
b) Mostre que o vector $(1,0)$ não é combinação linear dos vectores de S.
c) O conjunto S gera $\mathbb{R}^2$?

4) Considere em $\mathbb{R}^3$ o conjunto $S = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,2,2)\}$.

a) Mostre que o vector $(2,3,3)$ é combinação linear dos vectores de S.
b) Mostre que o vector $(0,0,1)$ não é combinação linear dos vectores de S.
c) O conjunto S gera $\mathbb{R}^3$?

5) Decida quais dos seguintes conjuntos geram $\mathbb{R}^3$:

a) $\{(1,3,3), (4,6,4), (-2,0,2), (3,3,1)\}$;
b) $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$;
c) $\{(1,4,2), (0,0,0), (-1,-3,-1), (0,1,1)\}$.
d) $\{(26,47,29), (123,0,498)\}$.

6) Comente a seguinte afirmação: Qualquer conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ tem pelo menos 3 vectores. Mais geralmente, qualquer conjunto gerador de $\mathbb{R}^m$ tem pelo menos m vectores.

7) Mostre que os seguintes conjuntos de vectores são linearmente dependentes:

a) Em $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (2,2)$;
b) Em $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,15)$, $\overrightarrow{v}_2 = (3,3)$, $\overrightarrow{v}_3 = (75,111)$;
c) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (2,2,4)$;
d) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (3,3,3)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,1,1)$;
e) Em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,134,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (3,312,3)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,16,6)$, $\overrightarrow{v}_4 = (45,1,1)$.

8) Comente a seguinte afirmação: Em $\mathbb{R}^3$ qualquer conjunto com mais de 3 vectores é linearmente dependente. Mais geralmente, em $\mathbb{R}^m$ qualquer conjunto com mais de m vectores é linearmente dependente.

9) Comente a seguinte afirmação: Qualquer base de $\mathbb{R}^m$ tem exactamente m vectores.

10) Seja $B = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ com $\overrightarrow{v}_1 = (1,0)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (1,1)$.

a) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^2$
b) Qual é o vector de $\mathbb{R}^2$ que nesta base tem coordenadas $(2,2)$?
c) Calcule as coordenadas do vector $(3,5)$ nesta base.
d) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nesta base.

11) Seja $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ com $\vec{v}_1 = (2,0,0)$, $\vec{v}_2 = (1,1,0)$ e $\vec{v}_3 = (1,1,1)$.

a) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^3$

b) Qual é o vector de $\mathbb{R}^3$ que nesta base tem coordenadas $(0,3,5)$?

c) Calcule as coordenadas do vector $(2,0,1)$ nesta base.

d) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ nesta base.

12) Para cada uma das seguintes matrizes, calcule bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo. Calcule ainda a característica e a nulidade:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Soluções

1a) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; 1b) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; 1c) É subespaço de $\mathbb{R}^2$; 1d) Não é subespaço de $\mathbb{R}^2$; 1e) Não é subespaço de $\mathbb{R}^2$;

2a) É subespaço de $\mathbb{R}^3$; 2b) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; 2c) É subespaço de $\mathbb{R}^3$; 2d) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; 2e) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$; 2f) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$;

5a) S não gera $\mathbb{R}^3$;5b) S gera $\mathbb{R}^3$; 5c) S não gera $\mathbb{R}^3$; 5d) S não gera $\mathbb{R}^3$.

10b) $(4,2)$; 10c) $(-2,5)$; 10d) $(x_1 - x_2, x_2)$.

11b) $(8,8,5)$; 11c) $(1,-1,1)$; 11d) $\left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, x_2 - x_3, x_3\right)$.

12a) $\{(-1,1)\}$ é base de $N(A)$; $\{(1,1)\}$ é base de $I(A)$; 12b) $\{(-2,1)\}$ é base de $N(A)$;$\{(1,2)\}$ é base de $I(A)$; 12c) $\varnothing$ é base de $N(A)$; $\{(1,1),(2,1)\}$ é base de $I(A)$; 12d) $\{(-2,0,1),(-1,1,0)\}$ é base de $N(A)$; $\{(1,0,1)\}$ é base de $I(A)$; 12e) $\varnothing$ é base de $N(A)$; $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é base de $I(A)$; 12f) $\{(-2,-1,1)\}$ é base de $N(A)$; $\{(1,1,0),(-1,1,0)\}$ é base de $I(A)$.

5.2 Exercícios complementares

Problema de resposta directa

1. Seja $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ com $\overrightarrow{v}_1 = (1,0,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,0,1)$.

   (a) O conjunto $\boldsymbol{B}$ é linearmente independente? R.: Sim

   (b) O conjunto $\boldsymbol{B}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$? R.: Sim.

2. Seja $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ com $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,0,1)$.

   (a) O conjunto $\boldsymbol{B}$ é linearmente independente? R.: Não.

   (b) O conjunto $\boldsymbol{B}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$? R.: Não.

3. O seguinte sistema define um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique. Qual é o objecto geométrico representado pelo sistema? $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

   R.: Resolve-se o sistema, ficamos com:

   $$\begin{cases} x=-2y \\ z=0 \end{cases},$$

   que é a equação cartesiana de uma recta. Como o sistema é linear e homogéneo a sua solução é sempre um subespaço de $\mathbb{R}^3$, espaço onde o sistema tem solução.

   (a) O seguinte sistema define um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique. Qual é o objecto geométrico representado pelo sistema?

   $$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

   Res.: Resolve-se o sistema, ficamos com:

   $$\begin{cases} x=-2y \\ z=0 \end{cases},$$

   que é a equação cartesiana de uma recta. Como o sistema é linear e homogéneo a sua solução é sempre um subespaço de $\mathbb{R}^3$, espaço onde o sistema tem solução.

(b) O seguinte sistema define um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique. Qual é o objecto geométrico representado pelo sistema?

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Res.: Resolve-se o sistema, ficamos com:

$$\begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases},$$

que é a equação cartesiana de uma recta. Como o sistema é linear e homogéneo a sua solução é sempre um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. Qual a base do núcleo da matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}?$$

Resolvemos a equação $Au=0$, fazendo a respectiva eliminação de Gauss-Jordan obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o que significa que temos uma variável livre e três variáveis dependentes. O sistema final fica

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \qquad\qquad =0 \\ \qquad\qquad x_3+2x_4 =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3x_2 \\ x_2=x_2 \\ x_3=-2x_4 \\ x_4=x_4 \end{cases}$$

A solução escrita na forma vectorial indica-nos a base do conjunto solução, que é o núcleo de A :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A base é dada por $\{(-3,1,0,0),(0,0,-2,1)\}$.

6 Aplicações lineares e diagonalização

6.1 Exercícios propostos

1) Seja $T : R^2 \to R^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \,.$$

a) Calcule a matriz A que representa T na base $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.
b) Mostre que T é invertível e calcule $T^{-1}(y_1, y_2)$.
c) Calcule a matriz B que representa T na base $v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)$.

2) Seja $T : R^2 \to R^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) \,.$$

a) Calcule a matriz A que representa T na base $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.
b) A transformação T é invertível?
c) Calcule a matriz B que representa T na base $v_1 = (2, 1), v_2 = (1, 1)$.

3) Seja $T : R^2 \to R^2$ a única transformação linear que, na base

$$v_1 = (1, 0) \text{ e } v_2 = (1, 1),$$

é representada pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que T não é invertível.
b) Calcule $T(x_1, x_2)$.

4) Seja $T : R^2 \to R^2$ a única transformação linear que, na base

$$v_1 = (1, 0) \text{ e } v_2 = (3, 1),$$

é representada pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que T é invertível.

b) Calcule $T^{-1}(y_1, y_2)$.

5) Seja $T : R^3 \to R^3$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)\,.$$

a) Calcule a matriz A que representa T na base

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (1,0,0).$$

b) Mostre que T é invertível e calcule $T^{-1}(y_1, y_2, y_3)$.
c) Calcule a matriz B que representa T na base

$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1).$$

6) Seja $T : R^3 \to R^3$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_3)\,.$$

a) Calcule a matriz A que representa T na base

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (1,0,0).$$

b) Mostre que T não é invertível.
c) Calcule a matriz B que representa T na base

$$v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,1,1).$$

7) Seja $T : R^3 \to R^3$ a única transformação linear que, na base

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,2,1),\ v_3 = (0,1,1)$$

é representada pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que T não é invertível.
b) Calcule $T(x_1, x_2, x_3)$.

8) Seja $T : R^3 \to R^3$ a única transformação linear que, na base

$$v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,0,1)$$

é representada pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que T é invertível.
b) Calcule $T^{-1}(y_1, y_2, y_3)$.

9) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Calcule o polinómio característico de A;
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de A;
c) Determine uma base de R^2 constituída por vectores próprios de A.

10) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o polinómio característico de A;.
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de A;
c) Determine uma matriz de mudança de base P e uma matriz diagonal D tais que $D = P^{-1}AP$.

11) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o polinómio característico de A;
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de A;
c) Mostre que não existe uma base de R^2 constituída por vectores próprios de A.

12) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o polinómio característico de A;
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de A;
c) Determine uma base de R^3 constituída por vectores próprios de A.
d) Determine uma matriz de mudança de base P e uma matriz diagonal D tais que $D = P^{-1}AP$.

13) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o polinómio característico de A;
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de A;
c) Mostre que não existe uma base de R^3 constituída por vectores próprios de A.

14) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o polinómio característico de A;
b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de A;
c) Determine uma matriz de mudança de base P e uma matriz diagonal D tais que $D = P^{-1}AP$.

15) Classificar as seguintes matrizes simétricas, em definidas positivas, definidas

negativas, sem-idefinidas positivas, semi-definidas negativas ou indefinidas:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

16) Classificar as seguintes formas quadráticas, em definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas ou indefinidas:
a) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$;
b) $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$;
c) $Q(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_2x_1 - 2x_2^2$;
d) $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2x_1$;
e) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_1$;
f) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_3x_1$.

Soluções

1a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; 1b) $T^{-1}(y_1, y_2) = (2y_1 - y_2, -y_1 + y_2)$; 1c) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

2a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; 2b) Não é invertível; 2c) $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$.

3b) $T(x_1, x_2) = (4x_1 - 4x_2, 0)$.

4b) $T^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2, \frac{1}{3}y_2\right)$

5a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; 5b) $T^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1 - y_3, -y_1 + 2y_2, -y_1 + y_2 + y_3)$;
5b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

6a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; 6c) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

7b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, -3x_2 + 6x_3, -3x_2 + 6x_3)$.

8b) Calcule $T^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, 2y_2 - y_3)$.

9a) $P(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$; 9b) Os escalares 1 e 3 são os únicos valores próprios de A. Os subespaços próprios de A são: $E_1 = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ e $E_3 = \{(x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$; 9c) $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

10a) $P(\lambda) = (2 - \lambda)^2 - 9$; 10b) Os escalares -1 e 5 são os únicos valores próprios de A. Os subespaços próprios de A são : $E_{-1} = \{(-x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ e $E_5 = \{(x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$; 10c) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

11a) $P(\lambda) = (2 - \lambda)^2$; 11b) O escalar 2 é o único valor próprio de A, e $E_2 = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ .11c) Se existisse uma base de R^2 constituída por vectores próprios de A, teríamos $\dim E_2 = 2$, já que 2 é o único valor próprio de A. Mas isto não pode acontecer, porque pela alínea anterior temos $\dim E_2 = 1$.

12a) $P(\lambda) = -\lambda \left[(2 - \lambda)^2 - 1\right]$; 12b) Os escalares 0, 1 e 3 são os únicos valores próprios de A. Tem-se $E_0 = \{(x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$, $E_1 = \{(0, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$ e $E_3 = \{(2x_3, 3x_3, 3x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$;

12c) $B = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (2, 3, 3)\}$; 12d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

13a) $P(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)^2$; 13b) Os escalares 2 e 3 são os únicos valores próprios de A. Tem-se $E_2 = \{(0, x_2, 0) : x_2 \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{(x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$;

13c) Não existe uma base de R^3 constituída por vectores próprios de A porque $\dim E_2 + \dim E_3 = 2 < 3$.

14a) $P(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$; 14b) Valores próprios: 2 e 3. Subespaços próprios: $E_2 = \{(x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ e $E_3 = \{(x_2 + x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$; 14c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

15a) Os valores próprios da matriz são 0 e 2, logo é semi-definida positiva; 15b) Os valores próprios da matriz são 1 e 3, logo é definida positiva; 15c) Os valores próprios da matriz são $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{2}$ e $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{2}$ (ambos negativos), logo é definida negativa; 15d) Os valores próprios da matriz são -1 e 4, logo é indefinida; 15e) Os valores próprios da matriz são -1 e 3, logo é indefinida; 15f) Os valores próprios da matriz são -2, 1 e 3, logo é indefinida.

16a) Semi-definida positiva; 16b) Definida positiva; 16c) Definida negativa; 16d) Indefinida; 16e) Indefinida; 16f) Indefinida.

6.2 Exercícios complementares

1. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, definida:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3, x_2 - x_3).$$

   (a) A aplicação T é injectiva? R.: Sim.

   (b) A aplicação T é sobrejectiva? R.: Sim

   (c) Se a aplicação T admitir inversa apresente a sua expressão.

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{y_2 - y_3}{2}).$$

2. Seja T a transformação linear anterior. Seja ainda a base $b = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,-1)\}$. Qual a matriz B que representa T na base b (tanto no espaço de partida como de chegada)?

   Res.: Trivial, basta constatar que a matriz S é igual à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ que representa T, logo $B = S^{-1}AS = A^{-1}AA = A$.

3. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y, 2z).$$

   (a) Calcule os seus valores próprios.
   R.: 2 (duplo) e 0 (simples).

   (b) Calcule os seus vectores próprios e apresente uma matriz S que diagonalise a transformação linear e uma matriz Λ diagonal que represente T:
   R.: $b = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, definida:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3, x_2 + x_3).$$

(a) A aplicação T é injectiva? R.: Sim.

(b) A aplicação T é sobrejectiva? R.: Sim.

(c) Se a aplicação T admitir inversa apresente a sua expressão.

R.:

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{-y_2 + y_3}{2}).$$

5. Seja T a transformação linear anterior. Seja ainda a base $b = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,-1,1)\}$. A matriz B que representa T na base b (tanto no espaço de partida como de chegada) é:

R.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

logo $B = S^{-1}AS = A$.

6. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (2x + 2y, 2x + 2y, 2z).$$

(a) Calcule os seus valores próprios.

R.: 0, 2 e 4.

(b) Calcule os seus vectores próprios e apresente uma matriz S que diagonalise a transformação linear e uma matriz Λ diagonal que represente T:

$$b = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$. Obtenha os valores próprios de A. Construa a matriz mudança de base que diagonaliza A.

Estude os sinais dos valores próprios de A e classifique a forma quadrática

$$f(x, y) = a\left(x^2 + y^2\right) + 2bxy$$

de acordo com a e b. Ou seja: determine no espaço dos parâmetros a e b (em que a é a ordenada e b a abcissa) as regiões em que a forma quadrática é definida positiva, definida negativa e indefinida. Obtenha as equações das rectas no espaço dos parâmetros sobre as quais a forma é semidefinida.

Res-: Calculamos os valores próprios de A :

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou seja $(a-\lambda)^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - a)^2 = b^2 \Leftrightarrow \lambda - a = \pm b \Leftrightarrow \lambda = a \pm b$, temos dois valores próprios se $b \neq 0$, que são $\lambda_1 = a + b$ e $\lambda_2 = a - b$. Para obter a matriz mudança de base é necessário calcular os vectores próprios. Supomos primeiros que $b \neq 0$, temos então para $\lambda_1 = a - b$

$$\begin{bmatrix} a-a+b & b \\ b & a-a+b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é

$$\begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

como $b \neq 0$ o sistema fica equivalente a $u_1 + u_2 = 0$, o que nos dá como primeiro vector próprio $(-1, 1)$ com cálculos semelhantes obtemos para o segundo vector próprio, correspondente a $\lambda_2 = a + b$ o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} -b & b \\ b & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que resulta no segundo vector próprio $v = (1, 1)$. A matriz diagonalizante, que contém os vectores próprios de A é a seguinte

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $b = 0$ o resultado é trivial, uma vez que sendo A diagonal a matriz diagonalizante é a identidade.

O estudo da forma quadrática fica agora muito simplificado, se $a+b > 0$ e $a-b > 0 \Leftrightarrow b > -a$ e $b < a$ a forma quadrática fica definida positiva. Ou seja no sector à direita das das rectas de equações $b = a$ e $b = -a$ ou, por outras palavras, na região à direita das bissectrizes do primeiro e quarto quadrantes.

Se $a+b < 0$ e $a-b < 0 \Leftrightarrow b < -a$ e $b > a$ então a forma quadrática fica definida negativa, ou seja à esquerda das rectas $b = a$ e $b = -a$, isto é, na região à esquerda das bissectrizes do segundo e terceiro quadrantes.

Sobre a recta $a + b = 0$ existem duas possibilidades, quando o par (a, b) está situado sobre a bissectriz do segundo quadrante a forma quadrática será semi-definida negativa pois $a - b < 0$. Quando (a, b) está situado sobre a bissectriz do quarto quadrante a forma é semi-definida positiva, pois nesse caso $a - b > 0$.

Sobre a recta $a - b = 0$ a situação é muito semelhante, na situação da bissectriz do primeiro quadrante a forma quadrática é semi-definida positiva, pois agora $a + b > 0$, no caso em que temos a bissectriz do terceiro quadrante a forma quadrática fica semi-definida negativa, pois agora $a + b < 0$.

No ponto $(0, 0)$ a função é nula, e não temos uma forma quadrática bem definida.

Na figura seguinte vemos o resumo de toda a situação.

7 Sucessões e séries

7.1 Exercícios propostos

1) Calcule o limite de cada uma das sucessões:

$$\text{a) } \frac{1}{n}; \text{ b) } \frac{n+1}{n}; \text{ c) } \frac{n^2+n+1}{2n^2+3}; \text{ d) } \frac{n^3+5n}{n^4+1};$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n}+1}; \text{ f) } \frac{2^n}{3^n}; \text{ g) } \frac{2^n+3^n}{3^n+1}; \text{ h) } \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt[3]{3^n}}.$$

2) Sabendo que

$$\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0 \text{ e } \lim_n \frac{n^\alpha}{x^n} = 0,$$

para qualquer $x > 1$ e $\alpha \in Q$, calcule:

$$\text{a) } \lim \frac{2^n+n^{10}}{2^n-n}; \text{ b) } \lim \frac{n2^n}{3^n}; \text{ c) } \lim \frac{5^n+n!}{3^n+2n!}.$$

3) Calcule a soma das séries

$$\text{a) } \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n}; \text{ b) } \sum_{n\geq 1} \frac{9}{10^n} \text{ c) } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{2n+1}}.$$

4) Calcule a soma da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}.$$

Sugestão: Note que $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

5) Calcule a soma da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}.$$

Sugestão: Note que $\frac{n}{2^n} = 2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^n}$.

6) Sabendo que a série de termos positivos

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

é divergente para $\alpha = 1$, e convergente para $\alpha > 1$, determine a natureza das séries:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}; \text{ b)} \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n^3+n+2}; \text{ c)} \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt[3]{n^5}+2} .$$

7) Recorra ao critério da razão para determinar a natureza das séries:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{n!}; \text{ b)} \sum_{n\geq 1} \frac{1.3...(2n-1)}{4.8...4n}.$$

8) Recorra ao critério da raíz para determinar a natureza das séries:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^n}}{\sqrt{n^n}}; \text{ b)} \sum_{n\geq 1} e^{-n^2}.$$

9) Calcular o raio de convergência das séries de potências:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 0} x^n; \text{ b)} \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}; \text{ c)} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}\, x^{2n-1}}{(2n-1)!}; \text{ d)} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!}.$$

Soluções

1a) 0; 1b) 1; 1c) $\frac{1}{2}$; 1d) 0; 1e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1f) 0; 1g) 1; 1h) 0 .

2a) 1; 2b) 0; 2c) $\frac{1}{2}$.

3a) 2; 3b)1; 3c) $\frac{1}{24}$.

4) 1; 5) 2.

6a) divergente; 6b) convergente; 6c) convergente.

7a) convergente; 7b) convergente; 8a) convergente; 8b) convergente.

9a) 1; 9b) $+\infty$; 9c) $+\infty$; 9d) $+\infty$.

7.2 Exercícios complementares

1. Seja $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^{n+1}}{n^{\frac{7}{3}}+2}$ uma série de potências. Calcule o seu raio de convergência:

   Res.:

$$r = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{\frac{n}{n^{\frac{7}{3}}+2}}{\frac{n+1}{(n+1)^{\frac{7}{3}}+2}} = \lim \frac{n}{n+1} \lim \frac{(n+1)^{\frac{7}{3}}+2}{n^{\frac{7}{3}}+2} =$$

   dividindo todos os termos do segundo limite por $n^{\frac{7}{3}}$

$$= 1 \cdot \lim \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{7}{3}} + \frac{2}{n^{\frac{7}{3}}}}{1+\frac{2}{n^{\frac{7}{3}}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

2. Seja $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^{n+1}}{n^{\frac{5}{2}}+2}$ uma série de potências. Calcule o seu raio de convergência:

   Res.:

$$r = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{\frac{n}{n^{\frac{5}{2}}+2}}{\frac{n+1}{(n+1)^{\frac{5}{2}}+2}} = \lim \frac{n}{n+1} \lim \frac{(n+1)^{\frac{5}{2}}+2}{n^{\frac{5}{2}}+2} =$$

   dividindo todos os termos do segundo limite por $n^{\frac{5}{2}}$

$$= 1 \cdot \lim \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}}{1+\frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

3. Seja $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^{n}}{2n^3+1}$ uma série de potências. Calcule o seu raio de convergência:

   R.: O raio de convergência é obtido pela expressão $r = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{\frac{n}{2n^3+1}}{\frac{n+1}{2(n+1)^3+1}}\right| = \lim \frac{n\left(2(n+1)^3+1\right)}{(n+1)(2n^3+1)}$ vê-se imediatamente que os termos de maior grau (grau 4) no numerador e no denominador têm ambos coeficiente 2 o limite é 1 e o raio de convergência é precisamente 1.

   Para esclarecer continuamos o cálculo do limite acima (o que não seria necessário)

$\lim \frac{n}{n+1} \frac{2(n+1)^3+1}{2n^3+1} = \lim \frac{n}{n+1} \lim \frac{2n^3+6n^2+6n+3}{2n^3+1} = \lim \frac{2+\frac{6}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{2+\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{2} =$ 1.

4. Prove que a série harmónica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Exercício complementar para resolver depois de estudar integrais, capítulo 9.

   Vamos usar o critério da comparação com um integral. Repare-se que a área dos rectângulos de altura $\frac{1}{n}$ e base 1 é maior do que a área das faixas situadas entre o gráfico da função $\frac{1}{x}$ e o eixo dos xx nos intervalos reais $[n, n+1]$ (que também têm comprimento 1) ou seja

$$\frac{1}{n} \times 1 > \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx,$$

   somando obtemos

$$\sum_{n\geq 1}^{A} \frac{1}{n} > \sum_{n\geq 1}^{A} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \right) = \int_1^{A+1} \frac{1}{x}\, dx,$$

   quando A é um inteiro. Assim

$$\sum_{n=1}^{A} \frac{1}{n} > \log\left(A+1\right),$$

   Fazendo o processo de limite e sabendo que $\lim_{A\to\infty} \sum_{n\geq 1}^{A} \frac{1}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ temos

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} > \lim_{A\to+\infty} \log\left(A+1\right) = +\infty,$$

   o que prova que a série harmónica diverge.

8 Funções - revisões

8.1 Exercícios propostos

1) Calcule a derivada de cada uma das funções:

a) $f(x) = 3x^4 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sin(x)$, $x > 0$;
c) $f(x) = x^2 \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = x \sin(x) \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
e) $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, $x \neq 1$; f) $f(x) = \tan(x)$, $x \neq \frac{n\pi}{2}$;
g) $f(x) = e^{\sin(x)}$, $x \in \mathbb{R}$; h) $f(x) = \sin(e^x) + \cos(e^{2x})$, $x \in \mathbb{R}$;
i) $f(x) = \log(x)$, $x > 0$; j) $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Para cada uma das seguintes funções, determine os pontos críticos e os intervalos de monotonia Identitifique ainda os pontos de máximo e mínimo relativo, e esboce o gráfico da função.

a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$, $x \in \mathbb{R}$;
c) $f(x) = 2 + (x-1)^4$, $x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = x/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;
e) $f(x) = \sin x - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; f) $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

4) Encontrar o rectângulo de maior área que se pode inscrever num semicírculo, com um dos lados contido no diâmetro.

5) Mostrar que de entre todos os rectângulos de área dada, o quadrado é o que tem menor perímetro.

6) Com uma placa rectangular 12 dm×8 dm pretende-se fazer uma caixa aberta suprimindo de cada esquina quadrados iguais e dobrando os lados para cima. Encontrar as dimensões da caixa de maior volume que assim se

pode construir.

7) Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$;	b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$;
c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$;	d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log x}{x^2+x-2}$;
e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x}$;	f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\log x}{x}$;
g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$;	h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;

Soluções

1a) $12x^3 + 2$; 1b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \cos x$; 1c) $2x\cos x - x^2\sin x$;
1d) $\sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x$; 1e) $\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$; 1f) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 1g) $(\cos x)\,e^{\sin(x)}$;
1h) $e^x\cos(e^x) - 2e^{2x}\sin(e^{2x})$ 1i) $\frac{1}{x}$; 1j) $\frac{1}{1+x^2}$.

7a) 1; 7b) $-\frac{1}{6}$; 7c) $\frac{14}{3}$; 7d) $\frac{1}{3}$; 7e) 0; 7f) 0; 7g) 1;7h) e.

8.2 Exercícios complementares

1) Um camião reboca um barco salva vidas. O camião desloca-se na estrada (suposta por simplicação uma linha paralela à costa) 4 vezes mais depressa do que o barco na água. O camião parte da origem e quer socorrer uma traineira que está em dificuldade na coordenada $(70, 30)$ (a unidade é o quilómetro). A estrada orienta-se ao longo do eixo dos xx: o meio terrestre e o meio aquático estão separados por uma linha imaginária que corresponde a este eixo, para $y > 0$ existe água. Em que ponto, medido no eixo dos xx, deve lançar-se o barco à água para socorrer a traineira de forma a minimizar o tempo de chegada ao ponto $(70, 30)$? Justifique a questão de forma completa.

R.: O tempo total é a soma do tempo que o camião vai na estrada t_e e do tempo que o barco leva a chegar à coordenada pretendida, t_m: $Tempo = t_e + t_m$. Esta é a função a minimizar. A velocidade em estrada v_e é quatro vezes a velocidade no mar v_m e $v_e = 4v_m = 4v$. O tempo relativamente ao ponto de transição x em que o barco é atirado ao mar é dado por $t_e = \frac{x}{4v} + \frac{s}{v}$ em que s é a hipotenusa do triângulo com catetos $70 - x$ e 30. Assim $s = \sqrt{(70-x)^2 + 30^2}$. Temos então todos os dados do problema:

$$Tempo\,(x) = \frac{x}{4v} + \frac{\sqrt{(70-x)^2 + 30^2}}{v},$$

é necessário minimizar esta função em função do ponto x, calcula-se a derivada e iguala-se a zero: $\frac{1}{4v} + \frac{-2(70-x)}{2v\sqrt{(70-x)^2+30^2}} = 0$, corta-se v e simplifica-se de forma a obter

$$\sqrt{(70-x)^2 + 30^2} = 4\,(70 - x)$$

Elevam-se ambos os membros ao quadrado:

$$(70-x)^2 + 30^2 = 16\,(70-x)^2$$

e resolve-se esta equação do segundo grau (escolhe-se a raiz negativa porque o barco terá de ser atirado para a água antes de se atingir a coordenada 70):

$$x = 70 - 2\sqrt{15}.$$

9 Primitivas e integrais

9.1 Exercícios propostos

1) Calcule uma primitiva para cada uma das funções:

a) $f(x) = x^4 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$;
b) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sin(x)$, $x > 0$;
c) $f(x) = x\cos(x^2) + x^2\sin(x^3)$, $x \in \mathbb{R}$;
d) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $x \neq 0$;
e) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$;
f) $f(x) = \tan(x)$, $x \neq \frac{n\pi}{2}$;
g) $f(x) = \sin(x)\cos(x)^2$, $x \in \mathbb{R}$;
h) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$;
i) $f(x) = x\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
j) $f(x) = x^2e^x$, $x \in \mathbb{R}$;
k) $f(x) = \log(x)$, $x > 0$;
l) $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Calcule as derivadas das funções $F : R \to R$ definidas por:

$$a)\ F(x) = \int_0^x e^t dt;\ b)\ F(x) = \int_0^{x^2} \sin(t)dt;\ c)\ F(x) = \int_{x^3-1}^{x^3+1} \cos(t)dt.$$

3) Calcule os integrais:

$$a) \int_0^1 \left(x^3 + 3x\right) dx;\ b) \int_1^4 \left(\sqrt{x^5}\right) dx;\ c) \int_1^e \frac{1}{x}dx;$$

$$d) \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx;\ e) \int_0^{\pi/2} x\cos\left(x^2\right) dx;\ f) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx.$$

4) Calcule o integral

$$\int_{-1}^2 f(x)dx,$$

quando $f : [-1, 2] \to R$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{|x|} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

5) Determine a área da região de R^2 delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

6) Determine a área da região de R^2 delimitada pelas curvas $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = x$.

7) Determine a área da região de R^2 delimitada pelas curvas $y = |x|\sin(x)$, $y = 0$, $x = \pi/2$ e $x = -\pi/4$.

8) Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) : x \in [0, 2] \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{3}x \wedge z = 0\right\}$$

em torno do eixo dos xx.

9) Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) : x \in [-2, 2] \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \wedge z = 0\right\}$$

em torno do eixo dos xx.

10) Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) : x \in [-3, 3] \wedge 0 \leq y \leq 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \wedge z = 0\right\}$$

em torno do eixo dos xx.

Soluções

1a) $\frac{x^5}{5} + x^2 + x + C$; 1b) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \cos x + C$; 1c) $\frac{\cos x^2}{2} - \frac{\cos x^3}{3} + C$; 1d) $-e^{\frac{1}{x}} + C$; 1e) $\log(e^x + 1) + C$; 1f) $-\log|\cos x| + C$; 1g) $\frac{-\cos^3 x}{3}$; 1h) $\arctan e^x$ 1i) $-x\cos x + \sin x + C$; 1j) $e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$; 1k) $x\log x - x + C$; 1l) $x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log\left(1 + x^2\right) + C$.

2a) e^x; 2b) $2x\sin(x^2)$; 2c) $3x^2\cos(x^3 + 1) - 3x^2\cos(x^3 - 1)$.

3a) $\frac{7}{4}$;3b) $\frac{254}{7}$;3c) 1;3d) 1;3e) $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\pi^2$;3f) $\log(e + 1) - \log 2$.

4) $\frac{10}{3}$; 5) $\frac{1}{12}$; 6) $e - \frac{3}{2}$; 7) $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\pi\sqrt{2} + 1$; 8) $\frac{8}{27}\pi$; 9) $\frac{32}{3}\pi$; 10) 16π.

9.2 Exercícios complementares

1. Calcule primitivas de

   (a) a. $x^2 \sin x$.
   Res.: Usa-se a técnica da primitivação por partes duas vezes de seguida:
   $$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$
   Ou seja
   $$\begin{aligned}\int x^2 \sin(x)\ dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos(x)\ dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + cte.\end{aligned}$$

   (b) $x^2 e^x$.
   Res.: De novo usa-se a técnica da primitivação por partes duas vezes de seguida:
   $$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$
   Ou seja
   $$\begin{aligned}\int x^2 e^x\ dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x\ dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x\ dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + cte.\end{aligned}$$

2. Calcule uma primitiva de $x^3 \cos x$.
   Res.: É um exercíco repetido por três vezes de primitivação por partes:
   $$\begin{aligned}\int x^3 \cos x\ dx &= x^3 \sin x - \int 3x^2 \sin x\ dx \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - \int 6x \cos x\ dx \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x + \int 6 \sin x\ dx \\ &= \left(x^3 - 6x\right) \sin x + \left(3x^2 - 6\right) \cos x + C\end{aligned}$$

3. Calcule $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$.

   Res.: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \left[\frac{1}{2}\log\left(1+e^{2x}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(1+e) - \frac{1}{2}\log(2) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

4. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$.

   Res.: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = [-\log(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\log 1 + \log 2 = \log 2.$

5. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$.

   Res.:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x}{1+2\sin x} dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\log|1+2\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\log 3\right]. \end{aligned}$$

6. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+9\cos^2 x} dx$.

   R.:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+9\cos^2 x} dx &= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-3\sin x}{1+9\cos^2 x} dx \\ &= -\frac{1}{3}\left[\arctan(3\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\arctan(3) - \arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{3} \end{aligned}$$

7. Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação completa do conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) : y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \wedge 0 \le x \le \sqrt{\cos y} \wedge z = 0\right\}$$

   em torno do eixo dos yy.

Resposta: Usamos a expressão $Vol = \int_a^b \pi f^2(y)\ dy$

$$\begin{aligned} Vol &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left(\sqrt{\cos y}\right)^2\ dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left|\cos y\right|\ dy \end{aligned}$$

como o coseno é uma função positiva entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ podemos retirar os módulos

$$Vol = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\ dy = \pi \left[\sin y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

8. Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação completa do conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) : y \in [0, 1] \wedge 0 \leq x \leq y^3 \wedge z = 0\right\}$$

em torno do eixo dos yy.

Res.: $\int_0^1 \pi \left(y^3\right)^2 dy = \pi \int_0^1 y^6 dy = \pi \left.\frac{y^7}{7}\right|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$

9. Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação completa do conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) : y \in [0, 2] \wedge 0 \leq x \leq y^2 \wedge z = 0\right\}$$

em torno do eixo dos yy.

Res.: $\int_0^2 \pi \left(y^2\right)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \pi \left.\frac{y^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$

10 Testes de auto-avaliação

Teste Tipo 1 de Matemática I - Curso de Arquitectura

Instruções. Responda com clareza e justificadamente a todas as questões. Leia atentamente as perguntas.

Não pode usar consulta. O uso de máquina de calcular não está autorizado.

Deve realizar este teste em duas horas. Se o não conseguir está mal preparado e deve reforçar muito o seu estudo.

---

1. Resolva por eliminação de Gauss e descreva geometricamente o conjunto de soluções dos sistemas em $\mathbb{R}^3$:

   (a) (1 val.) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

   (b) (1 val.) $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

2. (2 val.) Discuta, em função dos parâmetros reais α e β, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x+2y+z=-\beta \\ \alpha x+4y+2z=\beta \\ 2x+2y+\alpha z=4 \end{cases}.$$

3. (1 val.) Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+2z=b_1 \\ 2x+2y-z=b_2 \\ 4x+4y+3z=b_3 \end{cases},$$

   e calcule os vectores $(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ para os quais o sistema é possível. Qual é o significado geométrico?

4. (2 val.) Considere o plano $s \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $(1,0,1)$, $(3,1,1)$ e $(1,1,-1)$, e a recta $r \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $(0,0,0)$ e $(1,1,2)$. Determine a intersecção de s com r.

5. (2 val.) Pelo método que achar mais conveniente calcule a inversa da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

6. (1 val.) Utilizando o resultado da questão anterior resolva o sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=100 \\ x+y+3z=200 \\ \quad -y-z=300 \end{cases}$$

7. (2 val.) Calcule α real de forma a que a seguinte matriz seja singular (não tenha inversa)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

8. (2 val.) Calcule a matriz dos cofactores e a inversa da matriz seguinte

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

9. (2 val.) Use a regra de Cramer para resolver o sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$:

$$\text{a)} \begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+4y+z=0 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$$

10. (2 val.) O seguinte sistema define um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique. Qual é o objecto geométrico representado pelo sistema?

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

11. (2 val.) Prove que (os λ_1 são números reais)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & ... & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & ... & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

Nota - se não conseguir, prove com $n = 4$.(1 val.)

Teste Tipo 2 de Matemática I - Curso de Arquitectura

Instruções. Responda com clareza e justificadamente a todas as questões de desenvolvimento. Leia atentamente as perguntas. Responda apenas a uma das questões de escolha múltipla. Nesta parte as respostas erradas valem -0.25, ausência de resposta conta 0 e resposta certa conta 1 valor. Deve assinalar no quadrado certo: ☒ no próprio teste.

Não pode usar consulta e o uso de máquina de calcular não está autorizado.

Deve realizar este teste em duas horas.

---

1. Seja $B = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ com $\overrightarrow{v}_1 = (1,0,0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{v}_3 = (1,1,1)$. A resposta correcta é

   (a) ☐ B é linearmente independente mas não é gerador de $\mathbb{R}^3$.

   (b) ☐ B é linearmente independente e é gerador de $\mathbb{R}^3$ mas não é base.

   (c) ☐ B é linearmente dependente e é gerador de $\mathbb{R}^3$.

   (d) ☐ B é base de $\mathbb{R}^3$.

   (e) ☐ B é linearmente dependente e não é gerador de $\mathbb{R}^3$.

   ______________________________ 1

2. Seja a base $b = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ com $\overrightarrow{v}_1 = (2,0,0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0,1,1)$ e $\overrightarrow{v}_3 = (0,1,-1)$. Seja o vector $v = (1,2,0)$.

   (a) ☐ As componentes de v na base são $(2,2,2)$.

   (b) ☐ As componentes de v na base são $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

   (c) ☐ As componentes de v na base são $(1,1,1)$.

   (d) ☐ As componentes de v na base são $(2,3,1)$.

   (e) ☐ Nenhuma das anteriores.

   ______________________________ 2

3. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, definida:

$$T\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3\right).$$

(a) ☐ A imagem de T é um plano estritamente contido em $\mathbb{R}^3$.

(b) ☐ T não é sobrejectiva.

(c) ☐ A inversa de T é dada por $T^{-1}\left(y_1, y_2, y_3\right) = \left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}, 1\right)$.

(d) ☐ T não é injectiva.

(e) ☐ Nenhuma das anteriores.

______________________________ 3

4. Seja T uma transformação linear de P^3 em P^3, e seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ um polinónio de grau igual ou inferior a 3. T é definida por $T(p(t)) = p'(t) + p(t)$. Seja ainda a base $b = \left\{1+t, 1-t, t^2+t^3, -t^2+t^3\right\}$. (A base canónica em P^3 é $\left\{1, t, t^2, t^3\right\}$). A matriz que representa T na base b (tanto no espaço de partida como de chegada) é

(a) ☐ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) ☐ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) ☐ $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

(d) ☐ $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(e) ☐ Nenhuma das anteriores.

______________________________ 4

5. Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, 3z).$$

(a) i. $\square$ Os valores próprios de T são -1 e 3, a transformação é não diagonalizável porque há valores próprios em número inferior à dimensão do espaço.

ii. $\square$ Os valores próprios de T são 1, 2 e 3, a transformação é diagonalizável.

iii. $\square$ Os valores próprios de T são -1 e 3, a transformação é diagonalizável, apesar de existirem valores com multiplicidade algébrica superior a 1 as dimensões dos espaços próprios somam 3.

iv. $\square$ Os valores próprios de T são 1, e 3, a transformação é diagonalizável.

v. $\square$ Nenhuma das anteriores.

____ 5

(b) Os espaços próprios correspondentes a cada valor próprios são:

i. $\square$ $E(3) = \pounds\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, E(-1) = \pounds\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$

ii. $\square$ $E(3) = \pounds\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, E(-1) = \pounds\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$

iii. $\square$ $E(3) = \pounds\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, E(-1) = \pounds\left\{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$

iv. $\square$ $E(3) = \pounds\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, E(-1) = \pounds\left\{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$

v. $\square$ Nenhuma das anteriores.

____ 6

(c) Seja $f(x,y,z)$ uma função quadrática de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy.$$

i. ☐ $f(x,y,z)$ é uma função sempre positiva, excepto na origem, que é um mínimo.

ii. ☐ $f(x,y,z)$ é uma função sempre negativa, excepto na origem, que é um máximo.

iii. ☐ $f(x,y,z)$ é uma função sempre não negativa.

iv. ☐ $f(x,y,z)$ é uma função sempre não positiva.

v. ☐ Nenhuma das anteriores.

____ 7

6. Seja $\sum_{n\geq 2} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ uma série. A série converge para:

(a) ☐ 1.

(b) ☐ -1.

(c) ☐ $\frac{1}{2}$.

(d) ☐ $\frac{1}{4}$.

(e) ☐ Nenhuma das anteriores.

Sugestão: desdobre a fracção numa subtração conveniente, telescópica, de termos.

____ 8

7. Seja $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ uma série. Escolha:

(a) ☐ A série diverge.

(b) ☐ A série converge para -2.

(c) ☐ A série converge para 2.

(d) ☐ A série converge para 3.

(e) ☐ Nenhuma das anteriores.

____ 9

8. Seja a série de potências:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

O seu raio de convergência é:

(a) ☐ 0, a série diverge para todo o x real.
(b) ☐ $+\infty$ a série converge para todo o x real.
(c) ☐ 2.
(d) ☐ $\frac{1}{2}$.
(e) ☐ Nenhuma das anteriores.

______________________________ 10

9. Uma primitiva de $x^3 e^x$ é

(a) ☐ $\frac{x^4 e^x}{4}$.
(b) ☐ $e^x\left(-6+6x-3x^2-x^3\right)+Cte.$
(c) ☐ $e^x\left(-6+6x-3x^2+x^3\right)$.
(d) ☐ $e^x\left(-6+6x+3x^2+x^3\right)+Cte.$
(e) ☐ Nenhuma das anteriores.

______________________________ 11

10. (1 Val. por alínea) Problema de resposta directa, não apresente cálculos, apenas resultado final.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\log(x-3)}{2x^2+2x-40}$.

______________________________ 12

(b) Calcular uma qualquer primitiva de $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

______________________________ 13

(c) Calcular uma qualquer primitiva de $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

______________________________ 14

(d) Calcular uma qualquer primitiva de $x^2 \cos x$

______________________________ 15

(e) Calcular $\int_0^4 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$.

______________________________ 16

11. (2 val.) Problema de desenvolvimento, explique bem o que está a fazer.

    Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do conjunto

$$S = \{(x, y, z) : x \in [0, 3] \wedge 0 \leq y \leq x \wedge z = 0\}$$

    em torno do eixo dos xx.

    ____ 18

12. (2 val.) Um homem desloca-se a correr num cais 10 vezes mais depressa do que a nadar na água. O Pedro Paz está na origem e quer salvar um homem que está a afogar-se na coordenada $(100, 40)$ (a unidade é o metro). O cais orienta-se ao longo do eixo dos xx: o meio terrestre e o meio aquático estão separados por uma linha imaginária que corresponde a este eixo, para $y > 0$ existe água. Em que ponto, medido no eixo dos xx, deve atirar-se o Pedro à água para salvar o homem; de forma a minimizar o tempo de chegada ao ponto $(100, 40)$? Justifique a questão de forma completa.

    ____ 20