Espaços Simétricos

Pedro Matias
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal
pmatias@fisica.ist.utl.pt

24 de Julho de 2003

Resumo

Este trabalho é uma breve introdução à teoria dos espaços simétricos e das álgebras de Lie simétricas.

Começamos por fazer uma pequena revisão de alguns conceitos elementares da teoria dos grupos de Lie e revemos a noção de conexão afim numa variedade. Apresentamos depois o conceito de espaço simétrico afim, o qual está em correspondência biunívoca com o conceito de espaço simétrico. Ilustramos esta relação com exemplos. Finalmente apresentamos as álgebras de Lie simétricas (tanto do ponto de vista abstracto como do ponto de vista de objecto infinitesimal associado a um espaço simétrico) e enunciamos alguns resultados estruturais e de classificação, em analogia com o que foi feito para as álgebras de Lie.

As demonstrações da maioria dos teoremas são remetidas para as referências bibliográficas.

Conteúdo

1 Preliminares

1.1 Subgrupos de Lie

Definição 1.1. *Um* ***subgrupo de Lie*** *de um grupo de Lie G é um par (H, ϕ) tal que $\phi\colon H \to G$ é um homomorfismo injectivo de grupos de Lie.*

Observação 1.2. *Um subgrupo de Lie (H, ϕ) é necessariamente imersivo, i.e., a aplicação $d\phi_h\colon T_hH \to T_{\phi(h)}G$ é injectiva para todo o $h \in H$, logo $\phi(H)$ é uma* ***subvariedade imersa*** *de G.*

Definição 1.3. *Dois subgrupos de Lie (H_1, ϕ_1), (H_2, ϕ_2) de G dizem-se* ***equivalentes*** *se existe um isomorfismo de grupos de Lie $\psi\colon H_1 \to H_2$ tal que $\phi_2 \circ \psi = \phi_1$.*

Observação 1.4. *A definição anterior define uma relação de equivalência no conjunto dos subgrupos de Lie de G. Cada classe de equivalência tem um único representante da forma (A, i), onde $A \subset G$ é um subgrupo abstracto de G com uma estrutura de variedade (não necessariamente com a topologia induzida de G), que o torna num grupo de Lie e tal que a inclusão $i\colon A \to G$ é uma imersão. Se (H, ϕ) é outro representante de (A, i) então $A = \phi(H)$ necessariamente.*

Observação 1.5. *No caso em que $\phi\colon H \to G$ é um mergulho, i.e., $\phi\colon H \to \phi(H)$ é um homeomorfismo para $\phi(H)$ com a topologia induzida, (H, ϕ) diz-se um* ***subgrupo de Lie regular****. Nesse caso $\phi(H)$ é uma subvariedade de G e $\phi\colon H \to \phi(H)$ é um difeomorfismo.*

Teorema 1.6. *Seja (H, ϕ) um subgrupo de Lie de G. Então (H, ϕ) é um subgrupo de Lie regular sse $\phi(H) \subset G$ é fechado.*

Demonstração. [Wa, pp. 97] $\square$

Teorema 1.7. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então G/H tem estrutura de variedade com dimensão $\dim G - \dim H$ e a projecção canónica $\pi\colon G \to G/H$ é uma submersão.*

Demonstração. [Wa, pp. 120] $\square$

Teorema 1.8. *Se $H \subset G$ é um subgrupo normal fechado então G/H tem estrutura de grupo de Lie.*

Demonstração. [Wa, pp. 124] $\square$

Terminamos esta secção com dois teoremas fundamentais da teoria dos grupos de Lie. Mais tarde, generalizaremos estes resultados para a teoria dos espaços simétricos.

Teorema 1.9. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupos de Lie conexos $H \subset G$ e as subálgebras de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Em particular, um subgrupo de Lie $H \subset G$ é normal sse a correspondente subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ for um ideal.*

Demonstração. [Wa, pp. 94] □

Teorema 1.10. *Sejam G, H grupos de Lie com G conexo, simplesmente conexo e seja $\psi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\phi\colon G \to H$ tal que $\phi_* = \psi$.*

Demonstração. [Wa, pp. 101] □

1.2 Acções de grupos de Lie em variedades

Definição 1.11. *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. Uma* ***acção esquerda*** *de G em M é uma aplicação C^∞*

$$\begin{array}{rccl} \psi\colon & G \times M & \to & M \\ & (g,p) & \mapsto & \psi(g,p) \overset{\text{not.}}{=} g \cdot p \end{array}$$

tal que

1. $e \cdot p = p \quad \forall p \in M$,
2. $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p) \quad \forall g, h \in G, \quad \forall p \in M$.

O **subgrupo de isotropia** de um ponto $p \in M$ é o subgrupo fechado $G_p \subset G$ definido por

$$G_p := \{\, g \in G \mid g \cdot p = p \,\}.$$

A **órbita** do ponto $p \in M$ sob a acção do grupo G é o conjunto

$$G \cdot p \equiv \mathcal{O}_p := \{\, g \cdot p \mid g \in G \,\}.$$

Em geral $\mathcal{O}_p$ é uma subvariedade imersa de M difeomorfa a G/G_p. O **conjunto das órbitas** designa-se por M/G.

A acção diz-se **transitiva** se para todo o $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$, i.e., $M/G = \{*\}$.

Proposição 1.12. *Se G_p é o subgrupo de isotropia de $p \in M$ então $G_{g\cdot p} = g\, G_p\, g^{-1}$, i.e., G_p e $G_{g\cdot p}$ são subgrupos conjugados e portanto isomorfos. Em particular, se a acção for transitiva, todos os subgrupos de isotropia são isomorfos.*

Teorema 1.13. *Se G age transitivamente em M e $p \in M$ então*

$$\begin{array}{rccc} f_p\colon & G/G_p & \to & M \\ & [g] & \mapsto & g \cdot p \end{array}$$

é um difeomorfismo.

Demonstração. [Wa, pp. 123] □

1.3 Conexões afins e grupo de transformações afins

Definição 1.14. *Uma **conexão afim** numa variedade M é uma aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rcl} \nabla\colon & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y) & \mapsto \nabla_X Y \end{array}$$

tal que

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(fY) = X(f) + f\nabla_X Y$,

*para todo o $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$. $\nabla_X Y$ chama-se **derivada covariante de Y na direcção de X**.*

Proposição 1.15. *Sejam ∇ uma conexão afim em M, $p \in M$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então $(\nabla_X Y)_p \in T_pM$ só depende de X_p e dos valores de Y ao longo de um caminho tangente a X em p.*

Demonstração. [He, pp. 29] □

Como consequência da proposição anterior é possível calcular $\nabla_{\dot\gamma}$ quando X é um campo vectorial definido ao longo de uma caminho $\gamma\colon (a,b) \to M$.

Dada uma conexão afim ∇ em M, define-se a **torsão T de ∇** como

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \quad \text{para } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Define-se também a **curvatura R de ∇** como

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \text{para } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Usando as propriedades da conexão e do parêntesis de Lie, mostra-se que T e R são tensores em M do tipo $(1,2)$ e $(1,3)$ respectivamente.

Seja $\mathcal{T}(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}_s^r(M)$ a álgebra dos campos tensoriais em M. A conexão afim ∇ estende-se a $\mathcal{T}(M)$, i.e.

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

de tal forma que para todo o $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

1. $\nabla_X\colon \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ é uma derivação tal que $\nabla_X(\mathcal{T}_s^r(M)) \subset \mathcal{T}_s^r(M)$;

2. ∇_X comuta com contracções;

3. $\nabla_X f = X(f) \quad \forall f \in C^\infty(M)$;

4. $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$.

Dado um campo tensorial $K \in \mathcal{T}_s^r(M)$ define-se o **diferencial covariante** $\nabla K \in \mathcal{T}_{s+1}^r(M)$ como

$$\nabla K(X_1, \ldots, X_s; X) := (\nabla_X K)(X_1, \ldots, X_s)$$

onde $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.16. *Seja (M, ∇) uma variedade com uma conexão afim. Uma* ***transformação afim*** *de (M, ∇) é um difeomorfismo $\phi\colon M \to M$ tal que*

$$\nabla_{\phi_* X}(\phi_* Y) = \phi_*(\nabla_X Y)$$

para todo o $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $\mathsf{Aff}(M, \nabla)$ o conjunto de todas as transformações afins de (M, ∇). Mostra-se que $\mathsf{Aff}(M, \nabla)$ é um grupo de Lie[1] para a topologia compacto-aberto de dimensão $\leq n^2 + n$, onde $n = \dim M$ (ver [KN1, pp. 232-235]).

2 Espaços Simétricos Afins

Seja (M, ∇) uma variedade com uma conexão afim. Um caminho $\gamma\colon (a, b) \to M$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ diz-se uma **geodésica** se o campo vectorial $\dot\gamma(t)$ definido ao longo de γ satisfaz

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b).$$

A existência e unicidade de geodésicas em (M, ∇) é descrita no seguinte

[1] em rigor isto só é verdade se ∇ for completa (ver definição 2.2)

Teorema 2.1. *Sejam $p \in M$ e $X \in T_pM$. Então existe uma única geodésica $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ $(\epsilon > 0)$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X$.*

Demonstração. [He, pp. 30] $\square$

Definição 2.2. *Uma conexão afim ∇ em M diz-se* ***completa*** *se qualquer geodésica está definida para todo o $t \in \mathbb{R}$.*

Quando a conexão afim é completa podemos definir a **aplicação exponencial** da seguinte forma: para cada $p \in M$

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Exp}_p\colon & T_pM & \to & M \\ & X & \mapsto & \mathrm{Exp}_p(X) := \gamma(1), \end{array}$$

onde $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ é a geodésica com condição inicial $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X$.

No caso em que a conexão afim não é completa, também é possível definir a aplicação exponencial mas apenas num subconjunto de T_pM, mais propriamente nos pontos $X \in T_pM$ cujas geodésicas existem no instante $t = 1$. Um resultado particularmente importante é a seguinte

Proposição 2.3. *Para cada $p \in M$ existe vizinhança $N \subset T_pM$ de 0 e vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\mathrm{Exp}_p\colon N \to U$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. [He, pp. 32] $\square$

Observação 2.4. *Sem perda de generalidade podemos assumir que N é uma bola aberta em T_pM de forma a que se $X \in N$ então $-X \in N$.*

Definição 2.5. *A* ***simetria geodésica em*** *$p \in M$ é um difeomorfismo $s_p\colon U \to U$ tal que $s_p(\mathrm{Exp}_p(X)) = \mathrm{Exp}_p(-X)$ para todo o $X \in N$.*

Observação 2.6. *A simetria geodésica em $p \in M$ é única pois se escolhermos outro difeomorfismo $\mathrm{Exp}'_p\colon N' \to U'$, temos $\mathrm{Exp}'_p|_{N' \cap N} = \mathrm{Exp}_p|_{N' \cap N}$ pela unicidade das geodésicas e portanto $s'_p|_{U' \cap U} = s_p|_{U' \cap U}$.*

Observação 2.7. *Como N é uma bola aberta em T_pM, N é difeomorfa a uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem, e portanto define um sistema de coordenadas $(U, x^1, \ldots, x^n)$ em M. Neste sistema de coordenadas a simetria geodésica s_p transforma $(x^1, \ldots, x^n)$ em $(-x^1, \ldots, -x^n)$, logo $(ds_p)_q = -\mathrm{Id}_q$ para todo o $q \in U$, onde $\mathrm{Id}_q\colon T_qM \to T_qM$ é a aplicação identidade. Além disso s_p é* ***involutiva****, i.e., $s_p^2 = \mathrm{Id}_U$.*

Definição 2.8. *Um* ***espaço simétrico afim local*** *é uma variedade (M, ∇) com uma conexão afim tal que as simetrias geodésicas são transformações afins.*

Teorema 2.9. *Uma variedade (M, ∇) com uma conexão afim é um espaço simétrico afim local sse $T = 0$ e $\nabla R = 0$.*

Demonstração. Se $s_p \colon U \to U$ é uma transformação afim, então

$$\begin{aligned} T((s_p)_*X, (s_p)_*Y) = (s_p)_*T(X, Y) \Leftrightarrow \\ T(-X, -Y) = -T(X, Y) \Leftrightarrow \\ T(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(U). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla R((s_p)_*X, (s_p)_*Y, (s_p)_*Z; (s_p)_*W) = (s_p)_*\nabla R(X, Y, Z; W) \Leftrightarrow \\ \nabla R(-X, -Y, -Z; -W) = -\nabla R(X, Y, Z; W) \Leftrightarrow \\ \nabla R(X, Y, Z; W) = 0 \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(U). \end{aligned}$$

Recíprocamente, se $T = \nabla R = 0$, o isomorfismo linear $-\mathrm{Id}_q \colon T_qM \to T_qM$ preserva T_q e R_q para todo o $q \in U$. Logo, pelo Teorema 7.4 [KN1, pp. 261] existe uma transformação afim $\phi \colon U \to U$ tal que $d\phi_q = -\mathrm{Id}_q$. Como ϕ é afim, pela Proposição 1.1 [KN1, pp. 225] temos

$$\phi(\mathrm{Exp}_p(X)) = \mathrm{Exp}_p(d\phi_p(X)) = \mathrm{Exp}_p(-X)$$

e portanto $\phi = s_p$. □

Definição 2.10. *Um **espaço simétrico afim (global)** é um espaço simétrico afim local (M, ∇) em que as simetrias geodésicas podem ser estendidas a M.*

Teorema 2.11. *Se (M, ∇) é um espaço simétrico afim local com M simplesmente conexo e ∇ completa então (M, ∇) é um espaço simétrico afim.*

Demonstração. Consequência do Corolário 7.9 [KN1, pp. 265] □

O teorema seguinte mostra que a hipótese "∇ completa" no teorema anterior é necessária.

Teorema 2.12. *Se (M, ∇) é um espaço simétrico afim então ∇ é completa.*

Demonstração. Seja $\gamma \colon [0, a] \to M$ uma geodésica de x para y. Então podemos estender $\gamma(t)$ ao intervalo $[0, 2a]$. Basta tomar $\gamma(t + a) := s_y(\gamma(a - t))$, para $t \in [0, a]$. □

Teorema 2.13. *Se (M, ∇) é um espaço simétrico afim então $\mathit{Aff}(M, \nabla)$ age transitivamente em M.*

Demonstração. [KN2, pp. 223] □

Como consequência do teorema anterior, a componente conexa da identidade $G := \mathsf{Aff}(M, \nabla)^0$ também age transitivamente em M e se fixármos um ponto $o \in M$ temos $M \simeq G/H$ onde $H = \{ g \in G \mid g \cdot o = o \}$ é o subgrupo de isotropia de o. Além disso $\sigma \colon G \to G$ definido por $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$, onde s_o é a simetria geodésica em o, é um automorfismo involutivo de G.

Teorema 2.14. *Seja* $\mathsf{Fix}\,\sigma := \{ g \in G \mid \sigma(g) = g \}$. *Então*

1. $\mathsf{Fix}\,\sigma$ *é um subgrupo fechado de* G*;*

2. $(\mathsf{Fix}\,\sigma)^0 \subset H \subset \mathsf{Fix}\,\sigma$.

Demonstração. [KN2, pp. 224] □

3 Espaços Simétricos

3.1 Relação entre espaços simétricos afins e espaços simétricos

Na secção anterior vimos que a todo o espaço simétrico afim (M, ∇) estão associados os seguintes objectos:

- $G = \mathsf{Aff}(M, \nabla)^0$ grupo de Lie conexo a agir transitivamente em M;
- $H \subset G$ subgrupo de isotropia (fechado) de $o \in M$;
- Automorfismo involutivo $\sigma \colon G \to G$ tal que $(\mathsf{Fix}\,\sigma)^0 \subset H \subset \mathsf{Fix}\,\sigma$.

Podemos então definir abstractamente a noção de espaço simétrico independentemente da noção de espaço simétrico afim.

Definição 3.1. *Um* ***espaço simétrico*** *é um triplo* (G, H, σ)*, onde* G *é um grupo de Lie conexo,* $\sigma \colon G \to G$ *é um automorfismo involutivo e* $H \subset G$ *é um subgrupo de Lie fechado tal que* $(\mathsf{Fix}\,\sigma)^0 \subset H \subset \mathsf{Fix}\,\sigma := \{ g \in G \mid \sigma(g) = g \}$.

Se (G, H, σ) é um espaço simétrico então $M := G/H$ é uma variedade. Além disso, para cada $p \in M$ podemos definir um automorfismo involutivo $t_p \colon M \to M$ denominado **simetria em** p e que tem p como ponto fixo isolado. A construcção é a seguinte: para $o := [e]$ define-se a **simetria em** o como

$$\begin{array}{rccc} t_o \colon & M & \to & M \\ & [g] & \mapsto & [\sigma(g)]. \end{array}$$

Para $p = [g]$ define-se a **simetria em** p como

$$\begin{array}{rccl} t_p\colon & M & \to & M \\ & [\tilde{g}] & \mapsto & L_g \circ t_o \circ L_{g^{-1}}([\tilde{g}]) \end{array}$$

onde $L_g\colon M \to M$ é a translacção por $g \in G$ dada por $L_g([\tilde{g}]) = [g\tilde{g}]$.

Um resultado interessante é que dado um espaço simétrico (G, H, σ), podemos sempre construir um espaço simétrico afim:

Teorema 3.2. *Se (G, H, σ) é um espaço simétrico então existe uma única conexão ∇ em $M = G/H$ invariante por translacções L_g e pelas simetrias t_p em $p \in M$. Além disso (M, ∇) é um espaço simétrico afim para o qual as simetrias geodésicas s_p são as simetrias t_p.*

Demonstração. Ver Teoremas 3.1 e 3.2 [KN2, pp. 230-231]. □

O teorema anterior estabelece uma correspondência biunívoca entre espaços simétricos afins e espaços simétricos.

3.2 Exemplos de espaços simétricos

1. Qualquer grupo de Lie conexo L gera um espaço simétrico:
   - $G = L \times L$;
   - $\sigma\colon G \to G$, $\sigma(x, y) = (y, x)$;
   - $H = \mathsf{Fix}\,\sigma = \{\,(x, x) \in L \times L\,\}$;
   - (G, H, σ) é um espaço simétrico e $G/H \simeq L$.
2. Espaço Euclideano
   - $G = \mathsf{E}(n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$;
   - $\sigma\colon G \to G$, $\sigma(A, b) = (A, -b)$;
   - $H = \mathsf{Fix}\,\sigma = O(n)$;
   - (G, H, σ) é um espaço simétrico e $G/H \simeq \mathbb{R}^n$.
3. Esferas
   - $G = SO(n + 1)$;
   - $\sigma\colon G \to G$, $\sigma(A) = SAS^{-1}$ onde

$$S = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & I_{n\times n} \\ 0 & \end{array}\right);$$

- $H = (\mathsf{Fix}\,\sigma)^0 = SO(n)$;
- (G, H, σ) é um espaço simétrico e $G/H \simeq S^n$.

4. Espaço Hiperbólico
   - $G = SO(1, n)^0 = \{\, A \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid A^t S A = S \wedge A_{00} \geq 1 \,\}$;
   - $\sigma\colon G \to G$, $\sigma(A) = SAS^{-1}$, para a mesma matriz S do exemplo anterior;
   - $H = SO(n)$;
   - (G, H, σ) é um espaço simétrico e $G/H \simeq \mathbb{H}^n = \{\, (x^0, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = -1 \wedge x^0 \geq 1 \,\}$.

4 Álgebras de Lie Simétricas

Apresentamos nesta secção a noção de álgebra de Lie simétrica como generalização do conceito de álgebra de Lie. As álgebras de Lie simétricas surgem, em particular e de forma natural, como as versões infinitesimais dos espaços simétricos. Assim, dado um espaço simétrico é sempre possível construir uma álgebra de Lie simétrica correspondente. O recíproco nem sempre é verdade e existem condições de integrabilidade tal como na relação entre grupos e álgebras de Lie.

Definição 4.1. *Uma **álgebra de Lie simétrica** é um triplo $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$, onde $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra e $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um automorfismo involutivo tal que $\mathfrak{h} = \mathsf{Fix}\,\sigma = \{\, X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X \,\}$.*

Exemplo 4.2. *Qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{l}$ induz uma álgebra de Lie simétrica. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l}$ e tomármos $\mathfrak{h} = \mathsf{Fix}\,\sigma = \{\, (X, X) \in \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l} \,\}$, onde $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é definido por $\sigma(X, Y) = (Y, X)$, então $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ é uma álgebra de Lie simétrica.*

Dado um espaço simétrico (G, H, σ), podemos definir uma álgebra de Lie simétrica de forma natural. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ as álgebras de Lie de G e H respectivamente e $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ o automorfismo induzido por $\sigma\colon G \to G$. Então $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ é a **álgebra de Lie simétrica associada ao espaço simétrico** (G, H, σ).

Recíprocamente, se $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ é uma álgebra de Lie simétrica, podemos construir um espaço simétrico (G, H, σ) desde que sejam satisfeitas as condições de integrabilidade expressas no seguinte

Teorema 4.3. *Seja $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ uma álgebra de Lie simétrica e G um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então o automorfismo $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ induz um automorfismo $\sigma\colon G \to G$ e para qualquer subgrupo H tal que $(\mathsf{Fix}\,\sigma)^0 \subset H \subset \mathsf{Fix}\,\sigma$, o triplo (G, H, σ) é um espaço simétrico.*

Demonstração. [Ch, pp. 113] □

O teorema anterior estabelece uma correspondência biunívoca entre álgebras de Lie simétricas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ e espaços simétricos (G, H, σ) com G conexo, simplesmente conexo e H conexo e é o análogo do Teorema 1.9.

Vamos agora introduzir a noção de morfismo na categoria dos espaços simétricos.

Definição 4.4. *Um* ***homomorfismo*** *de um espaço simétrico* (G', H', σ') *para um espaço simétrico* (G, H, σ) *é um homomorfismo de grupos de Lie* $\alpha\colon G' \to G$ *tal que* $\alpha(H') \subset H$ *e* $\sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma'$*. Denotaremos tal homomorfismo por* $\alpha\colon (G', H', \sigma') \to (G, H, \sigma)$.

Definição 4.5. *Um homomorfismo* $\alpha\colon (G', H', \sigma') \to (G, H, \sigma)$ *diz-se um*

- ***monomorfismo*** *se* $\alpha\colon G' \to G$ *for injectiva;*
- ***epimorfismo*** *se* $\alpha\colon G' \to G$ *for sobrejectiva;*
- ***isomorfismo*** *se* $\alpha\colon G' \to G$ *for um isomorfismo de grupos de Lie e* $\alpha(H') = H$.

Definição 4.6. *Um triplo* (G', H', σ') *diz-se um* ***subespaço simétrico*** *(respectivamente* ***subespaço simétrico fechado****,* ***subespaço simétrico normal****) do espaço simétrico* (G, H, σ) *se*

- G' *é um subgrupo de Lie (respectivamente subgrupo fechado, subgrupo normal) de* G *invariante por* σ*;*
- $H' = G' \cap H$*;*
- $\sigma' = \sigma \mid_{G'}$.

De igual forma se define a noção de morfismo na categoria das álgebras de Lie simétricas.

Definição 4.7. *Um* ***homomorfismo*** *de uma álgebra de Lie simétrica* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \sigma)$ *para uma álgebra de Lie simétrica* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *é um homomorfismo de álgebras de Lie* $\alpha\colon \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ *tal que* $\sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma'$*. Denotaremos tal homomorfismo por* $\alpha\colon (\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \sigma') \to (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$.

Observação 4.8. *A condição* $\alpha(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{h}$ *é uma consequência de* $\sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma'$ *e não é necessária na definição.*

A definição de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo de álgebras de Lie simétricas é análoga ao caso dos espaços simétricos.

Definição 4.9. *Um triplo* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \sigma')$ *diz-se uma* ***subálgebra de Lie simétrica*** *(respectivamente* ***ideal simétrico****) da álgebra de Lie simétrica* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *se*

- $\mathfrak{g}'$ *é uma subálgebra de Lie (respectivamente ideal) de* $\mathfrak{g}$ *invariante por* σ*;*
- $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$*;*
- $\sigma' = \sigma \mid_{\mathfrak{g}'}$*.*

Dado um homomorfismo de espaços simétricos $\alpha\colon (G', H', \sigma') \to (G, H, \sigma)$ é sempre possível construir um homomorfismo induzido ao nível das álgebras de Lie simétricas de uma forma trivial. O recíproco nem sempre é verdade como podemos ver no seguinte

Teorema 4.10. *Seja* $\psi\colon (\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \sigma') \to (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *um homomorfismo de álgebras de Lie simétricas tal que* G' *é um grupo de Lie simplesmente conexo e* H' *é um subgrupo de Lie conexo de* G'*. Então existe um único homomorfismo de espaços simétricos* $\alpha\colon (G', H', \sigma') \to (G, H, \sigma)$ *tal que* ψ *é o homomorfismo induzido por* α *ao nível das álgebras de Lie simétricas.*

O Teorema 4.10 é o análogo do Teorema 1.10 para o caso da integrabilidade de homomorfismos de álgebras de Lie simétricas.

Para terminar esta secção introduzimos o conceito de soma directa de álgebras de Lie simétricas.

Definição 4.11. *Sejam* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \sigma')$*,* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *álgebras de Lie simétricas. Define-se a* ***soma directa*** *de* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \sigma')$ *com* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *como a álgebra de Lie simétrica* $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}', \sigma \oplus \sigma')$*, onde* $\oplus$ *representa soma directa de álgebras de Lie.*

5 Estrutura das Álgebras de Lie Simétricas

Analisemos em mais detalhe a estrutura das álgebras de Lie simétricas. Seja $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ uma álgebra de Lie simétrica. Como σ é um automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$, os seus valores próprios são 1 e -1 e $\mathfrak{h}$ é, por definição, o espaço próprio associado ao valor próprio 1. Seja $\mathfrak{m}$ o espaço próprio associado ao valor próprio -1. Então a decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m} \qquad \text{(soma directa de espaços vectoriais)}$$

é designada por **decomposição canónica de** $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$.

Proposição 5.1. *Se* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ *é a decomposição canónica de uma álgebra de Lie simétrica* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$*, então temos*

(1) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$*;*

(2) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$*;*

(3) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$*.*

Demonstração. A relação (1) é trivial pois $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra. Se $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{m}$ então

$$\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [X, -Y] = -[X, Y],$$

logo $[X, Y] \in \mathfrak{m}$, o que prova (2). Se $X, Y \in \mathfrak{m}$ então

$$\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [-X, -Y] = [X, Y],$$

logo $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, o que prova (3). $\square$

Observação 5.2. *As relações (1), (2) e (3) na proposição anterior caracterizam uma álgebra de Lie simétrica: dada uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *e uma decomposição* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ *(soma de espaços vectoriais) satisfazendo (1), (2), (3), se definirmos a transformação linear* $\sigma \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *como* $\sigma(X) = X$ *para* $X \in \mathfrak{h}$ *e* $\sigma(Y) = -Y$ *para* $Y \in \mathfrak{m}$*, então é fácil verificar que* σ *é um automorfismo involutivo de* $\mathfrak{g}$ *e* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *é uma álgebra de Lie simétrica.*

Na teoria das álgebras de Lie de dimensão finita existem dois resultados estruturais de enorme relevância. Por um lado, o teorema de Levi diz-nos que qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é soma semidirecta de uma álgebra de Lie semisimples com o ideal resolúvel maximal de $\mathfrak{g}$. Este facto é bastante importante pois reduz o problema da classificação das álgebras de Lie de dimensão finita a dois subproblemas: a classificação das álgebras de Lie semisimples (resolvido por Cartan no caso das álgebras de Lie complexas) e a classificação das álgebras de Lie resolúveis (problema em aberto). Outro resultado bastante interessante é o da decomposição das álgebras de Lie semisimples como soma directa de álgebras de Lie simples.

Nesta secção iremos generalizar estes factos para as álgebras de Lie simétricas e enunciar alguns resultados de classificação das mesmas. Começamos com uma generalização do teorema de Levi.

Teorema 5.3. *Seja* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *uma álgebra de Lie simétrica e* $\mathfrak{r}$ *o radical de* $\mathfrak{g}$*. Então existe subálgebra de Lie simétrica* $(\mathfrak{s}, \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}, \sigma')$ *de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *tal que* $\mathfrak{s}$ *é subálgebra semisimples de* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = 0$*.*

Demonstração. [KN2, pp. 238] □

Teorema 5.4. *Seja* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *uma álgebra de Lie simétrica com* $\mathfrak{g}$ *semisimples. Então* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *é soma directa de álgebras de Lie simétricas, i.e.*

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma) = (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1', \mathfrak{h}_1, \sigma_1) \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_k', \mathfrak{h}_k, \sigma_k) \oplus \\ (\mathfrak{g}_{k+1}, \mathfrak{h}_{k+1}, \sigma_{k+1}) \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g}_r, \mathfrak{h}_r, \sigma_r)$$

onde

- $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1', \dots, \mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k', \mathfrak{g}_{k+1}, \dots, \mathfrak{g}_r$ *são os ideais simples de* $\mathfrak{g}$*;*
- $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1', \dots, \mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_k', \mathfrak{g}_{k+1}, \dots \mathfrak{g}_r$ *são invariantes por* σ*,* $\sigma_i = \sigma \mid_{\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_i'}$ *para* $i = 1, \dots, k$ *e* $\sigma_j = \sigma \mid_{\mathfrak{g}_j}$ *para* $j = k+1, \dots, r$*;*
- *Para* $i = 1, \dots, k$*,* $\sigma \colon \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{g}_i'$ *é isomorfismo de álgebras de Lie e* $\mathfrak{h}_i = \{ (X, \sigma(X)) \in \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_i' \mid X \in \mathfrak{g}_i \}$*. Para* $j = k+1, \dots, r$*,* $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{h}$*.*

Demonstração. Como σ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, σ permuta os ideais simples de $\mathfrak{g}$. Mas σ é involutivo e portanto existem duas possibilidades

- $\sigma(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$ ou
- $\sigma(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_{i'}$ e $\sigma(\mathfrak{g}_{i'}) = \mathfrak{g}_i$.

Podemos então escrever

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1') \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_k') \oplus \mathfrak{g}_{k+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r,$$

onde $\sigma(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i'$ e $\sigma(\mathfrak{g}_i') = \mathfrak{g}_i$ para $i = 1, \dots, k$ e $\sigma(\mathfrak{g}_j) = \mathfrak{g}_j$ para $j = k+1, \dots, r$. □

Os dois teoremas anteriores mostram que os blocos elementares de uma álgebra de Lie simétrica são do seguinte tipo:

1. $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \Delta\mathfrak{g}, \sigma)$, onde $\mathfrak{g}$ é simples, $\Delta\mathfrak{g} = \{ (X, X) \mid X \in \mathfrak{g} \}$ e $\sigma(X, Y) = (Y, X)$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$;
2. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$, onde $\mathfrak{g}$ é simples;
3. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$, onde $\mathfrak{g}$ é resolúvel.

Observação 5.5.
- *As álgebras de Lie simétricas do tipo* 1. *estão em correspondência biunívoca com as álgebras de Lie simples e portanto estão classificadas no caso complexo;*

- *As álgebras de Lie simétricas do tipo* 2. *foram classificadas por Berger [Be].*
- *A classificação das álgebras de Lie simétricas do tipo* 3. *é um problema em aberto.*

Terminamos esta secção com dois exemplos de álgebras de Lie simétricas do tipo 2. satisfazendo um conjunto de propriedades adicionais.

Exemplo 5.6. *Consideremos uma álgebra de Lie simétrica* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *satisfazendo as propriedades*

1. $\mathfrak{g}$ *simples e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ *(soma directa de espaços vectoriais) com as relações*
$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0, \qquad [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_{-1}, \qquad [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1,$$
$$[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_0, \qquad [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = \{0\}, \qquad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \{0\};$$
2. *A decomposição canónica* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ *dada por*
$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_1.$$
3. *Relativamente à forma de Killing* B *em* $\mathfrak{g}$, *os subespaços* $\mathfrak{g}_{-1}$ *e* $\mathfrak{g}_1$ *são duais e verificam*
$$B(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}) = 0, \quad B(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1) = 0.$$

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$, *com*
$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\},$$
onde X_{11}, X_{22}, X_{12}, X_{21} *são matrizes* $p \times q$, $q \times q$, $p \times q$, $q \times p$ *respectivamente, tal que* $\operatorname{Tr} X_{11} + \operatorname{Tr} X_{22} = 0$. *Então* $(\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R}), \mathfrak{g}_0, \sigma)$ *é uma álgebra de Lie simétrica satisfazendo* 1., 2., 3..

Segundo Berger [Be] existem 12 classes de álgebras de Lie simétricas do tipo clássico (i.e. para $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie clássica) e 6 álgebras de Lie simétricas excepcionais satisfazendo as condições do Exemplo 5.6.

Observação 5.7. *Estas álgebras de Lie simétricas também podem ser caracterizadas pelas propriedades*

- $\mathfrak{g}$ *simples;*

- $\mathfrak{m}$ *contém subespaço próprio invariante por* $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$.

Exemplo 5.8. *Consideremos uma álgebra de Lie simétrica* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ *tal que* $\mathfrak{g}$ *é simples e* $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ *age irredutivelmente em* $\mathfrak{m}$. *Um exemplo de uma álgebra de Lie simétrica deste tipo é*

- $\mathfrak{g} = (\mathfrak{sl}(p+q), \mathbb{R})$;
- $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \mid X_{11}^t + X_{11} = 0\,,\ X_{22}^t + X_{22} = 0\,,\ X_{12}^t = X_{21} \right\}$,

  onde X_{11}, X_{22}, X_{12}, X_{21} *são matrizes com um número de linhas e colunas descritas no exemplo anterior;*
- $\sigma \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_{11}^t & X_{21}^t \\ X_{12}^t & -X_{22}^t \end{pmatrix}$.

Segundo Berger [Be] existem 44 classes de álgebras de Lie simétricas do tipo clássico e 86 álgebras de Lie excepcionais satisfazendo a condição do Exemplo 5.8.

Referências

[Wa] Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 1983.

[He] Sigurdur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, Inc., 1978.

[KN1] Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, (Volume 1), John Wiley & Sons, Inc., 1963.

[KN2] Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, (Volume 2), John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[Ch] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, 1946.

[Be] M. Berger, "Les espaces symétriques noncompacts", Ann. Sci. École Norm. Sup. 74 (1957), 85-177.