

Exercícios de Álgebra Linear

LEIC – Alameda

1º Semestre 2005/2006

Paulo Pinto

<http://www.math.ist.utl.pt/~ppinto/>

Setembro 2005

Conteúdo

1	Sistemas Lineares de Equações e o Cálculo Matricial	2
1.1	Números complexos	2
1.2	Método de eliminação de Gauss	2
1.3	Álgebra das matrizes	4
2	Espaços Lineares (Vectoriais)	7
2.1	Subespaços lineares	7
2.2	Vectorios geradores	8
2.3	Independência linear	9
2.4	Bases e dimensão de espaços lineares	9
2.5	Matriz mudança de base	11
3	Transformações Lineares	11
3.1	Representação matricial de transformações lineares	12
3.2	Transformações injectivas/sobrejectivas e bijectivas	13
4	Determinante e Aplicações	14
5	Valores Próprios e Vectorios Próprios	15
5.1	Alguns exercícios resolvidos	17
6	Produtos Internos	22
6.1	Complemento, projecções e bases ortogonais	23
6.2	Alguns exercícios resolvidos	24
6.3	Formas quadráticas	27

1 Sistemas Lineares de Equações e o Cálculo Matricial

1.1 Números complexos

Exercício 1.1 Verifique, com exemplos, que as inclusões $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ são todas estritas. Será que isto implica que, p.ex., $\#\mathbb{N} \neq \#\mathbb{Z}$??

Exercício 1.2 Escreva na forma $a + bi$ os seguintes números complexos:

(a) $(2 - i)^2$ (b) $\frac{2}{4-3i}$ (c) $\frac{1+i}{1-i}$ (d) $(i)^n, n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.3 Escreva os seguintes números na forma polar $z = \rho e^{i\theta}$:

(a) 7 (b) $-2i$ (c) $\sqrt{1-i}$ (d) $\sqrt[3]{-i}$.

Exercício 1.4 Seja $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ um polinômio de coeficientes reais (i.e. todos os coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$) e na variável complexa z .

(a) Mostre que $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

(b) Conclua que se $\lambda = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz de $p(z)$, então $\bar{\lambda}$ também o é.

(c) Mostre que se $n = 3$ e $p(z)$ tem uma raiz com parte imaginária não nula, então p possui três raízes distintas.

(d) Calcule todas as raízes de $p(z) = 5 + 9z + 8z^2 + 4z^3$.

1.2 Método de eliminação de Gauss

Exercício 1.5 Quais das seguintes equações são equações lineares em x, y e z ?

(a) $x + \pi^2y + \sqrt{2}z = 0$, (b) $x + y + z = 1$, (c) $x^{-1} + y + z = 0$, (d) $xy + z = 0$.

Exercício 1.6 Resolva cada um dos sistemas de equações lineares, utilizando o método de Eliminação de Gauss:

(a)
$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 0 \\ 9x + 6y = 1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x + 2y + 2z + 3w = 1 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 20 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - y + z = 11 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 20 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ -6x + 4y + 10z = 24 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} y + z = 2 \\ 3y + 3z = 6 \\ y + x + y = 0 \end{cases}$$

Exercício 1.7 Indique a matriz aumentada de cada sistema linear do exercício 1.6 e aplique o método de Eliminação de Gauss para confirmar o resultado obtido no exercício 1.6. Indique o conjunto solução.

Exercício 1.8 Encontre um sistema equações lineares cujo conjunto solução seja dado por S :

(a) $S = \{(1 + t, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}$;

(b) $S = \{(1, 0, 1)\}$;

(c) $S = \{(t, 2t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$;

(d) $S = \{(t, s, t + s) : t, s \in \mathbb{R}\}$;

(e) $S = \emptyset$.

Exercício 1.9 (a) Discuta o sistema $ax = b$ na variável x em função dos parâmetros reais a e b .

(b) Prove, usando o método de eliminação de Gauss, que o seguinte sistema nas incógnitas x, y e nos parâmetros reais a, b, c, d_1 e d_2 é possível e determinado (SPD) se e só se $ad - cb \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = d_1 \\ cx + dy = d_2. \end{cases}$$

Resolução: Toda a complexidade de sistemas equações lineares está presente na alínea (a). Com efeito, ele é possível e determinado sse $a \neq 0$ (e neste caso $x = b/a$ é a única solução). Se $a = 0$ então ou $b = 0$ e portanto o sistema é possível indeterminado (todos os reais x resolvem a dita equação). Nos restantes casos, $a = 0$ e $b \neq 0$, o sistema é impossível.

Quanto à alínea (b), a matriz aumentada do sistema é: $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & d_1 \\ c & d & d_2 \end{array} \right]$. Vamos dividir a resolução em dois casos:

• Caso $a \neq 0$. Então por eliminação de Gauss temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & d_1 \\ c & d & d_2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{c}{a}L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|c} a & b & d_1 \\ 0 & d - \frac{cd_1}{a} & d_2 - \frac{cd_1}{a} \end{array} \right].$$

Logo o sistema inicial é SPD sse $a \neq 0$ e $d - \frac{cd_1}{a} \neq 0$, mas como estamos a assumir que $a \neq 0$, podemos multiplicar esta última equação por a e obter $ad - cb \neq 0$.

• Caso $a = 0$. Aplicando a eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & b & d_1 \\ c & d & d_2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|c} c & d & d_2 \\ 0 & b & d_1 \end{array} \right]$$

pelo que nem c nem b poderão ser nulos para que o sistema seja SPD, como $a = 0$, isto equivale a dizer que $ad - cb \neq 0$ como requerido.

Exercício 1.10 Forneça exemplos concretos de sistemas de equações lineares $Ax = b$, uns possíveis determinados e outros indeterminados, cuja matrizes de coeficientes das incógnitas A não sejam quadradas.

Resolução: O sistema com matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$ é possível indeterminado e o sistema com

matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ é possível mas determinado. Ambas satisfazem as condições requeridas no enunciado.

Exercício 1.11 Discuta, em função do parâmetros α e β , cada sistema de equações cuja matriz aumentada é:

$$(a) \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array} \right] \quad (b) \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array} \right]$$

Resolução: (a) Para $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ o sistema é possível e determinado. Para $\alpha = 1$ sistema é possível e indeterminado. Finalmente para $\alpha = -2$, o sistema é impossível.

(b) O sistema é possível e determinado se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 2$. É impossível para $\alpha = 0$ e $\beta \neq 2$. Nos restantes casos, o sistema linear é possível e indeterminado (i.e. $\beta = 2$ e qualquer α).

1.3 Álgebra das matrizes

Exercício 1.12 Considere o sistema $Ax = b$ cuja matriz matriz aumentada é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \beta \\ 9 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right]$.

- (a) Calcule as características de A e da matriz aumentada $\left[A \mid b \right]$ em função dos parâmetros α e β .
 (b) Discuta o tipo de solução dos sistema em função dos parâmetros α e β .¹

Resolução: Usando eliminação de Gauss temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \beta \\ 9 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[-9L_1 + L_3]{-2L_1 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -5 & 2\alpha - 1 & \beta - 2 \\ 0 & -20 & 1 + 9\alpha & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{-4L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -5 & 2\alpha - 1 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 & -4\beta - 2 \end{array} \right].$$

(a) Onde

$$\text{car } A = \begin{cases} 3, & \alpha \neq -5 \\ 2, & \alpha = -5 \end{cases}, \quad \text{car } [A|b] = \begin{cases} 3, & \alpha \neq -5, \beta \in \mathbb{R} \\ 3, & \alpha = -5 \text{ e } \beta \neq -1/2 \\ 2, & \alpha = -5 \text{ e } \beta = -1/2 \end{cases}.$$

(b) Dado o comentário em rodapé (e analisando novamente a matriz em escada de linhas) temos que o sistema é impossível quando $\alpha = -5$ e $\beta \neq -1/2$. É determinado quando $\alpha \neq -5$ e indeterminado quando $\alpha = -5$ e $\beta = -1/2$.

Exercício 1.13 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -1 \\ 2 & 3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \pi \\ 3 \end{bmatrix}$.

Calcule se possível $A + B$, $2A$, CD , AB , AC , DC , CB e AD .

Resolução: Dadas as definições AB , AC , AD e DC não são possíveis de calcular.

Exercício 1.14 (a) Encontre matrizes A e B do tipo 2×2 tais que $AB \neq BA$. Será que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

(b) Prove que dadas duas matrizes quadradas A e B tais que $AB = B$ e $BA = A$ então temos $A^2 = A$.

Resolução: (a) Há muitas – use por exemplo as seguintes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.15 Sejam $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertíveis. Prove que AB também é invertível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Resolução: Temos que provar que existe uma matrix X tal que $X(AB) = (AB)X = I$, onde I denota a matriz identidade $n \times n$. Mas como sugere o enunciado, $X = B^{-1}A^{-1}$. Provemos p.ex. que $X(AB) = I$:

$$X(AB) = B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}1B = B^{-1}B = 1,$$

onde na segunda igualdade usa-se associatividade da multiplicação matricial, na terceira igualdade a hipótese de A^{-1} ser a inversa de A e na última igualdade a hipótese de B^{-1} ser a inversa de B .

¹Note que num sistema $Ax = b$: $\text{car}(A) = \text{car } [A|b]$ sse o sistema é possível (portanto impossível sse $\text{car } [A] \neq \text{car } [A|b]$). Mais $\text{car}(A) = \text{car } [A|b]$ = número de incógnitas sse é possível determinado e possível indeterminado sse $\text{car}(A) = \text{car } [A|b] \neq$ número de incógnitas

Exercício 1.16 Prove que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ sempre que $ad - cb \neq 0$.

Resolução: Aplique o método de Gauss-Jordan, $[A|\mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{1}|A^{-1}]$, verificando que $\text{car } A = 2$ sse $ad - cb \neq 0$. Confronte com o exercício 1.9, alínea (b).

Exercício 1.17 Sendo $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$, define-se o traço de A , $\text{tr}(A)$, como sendo a soma dos elementos da diagonal principal, i.e. $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$.

(a) Prove que $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ e $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ onde A^T designa a matriz transposta de A

(b) Prove que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

(c) Se $B = S^{-1}AS$ para alguma matriz invertível S , então prove que $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

Resolução: As alíneas (a) e (b) seguem directamente das definições. Use a alínea (b) para resolver (c).

Exercício 1.18 Encontre matrizes A e B do tipo 2×2 reais, tais que $AB \neq BA$. Será que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ para quaisquer matrizes A e B ? Justifique.

Resolução: Use, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.19 Prove que $\{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : AB = BA, \text{ para qualquer } B\} = \{aI : a \in \mathbb{R}\}$ onde I denota a matriz identidade do tipo 2×2 . Generalize para matrizes $n \times n$.

Resolução: Dada uma matriz $A \in \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : AB = BA, \text{ para toda } B\}$ escrever as condições que provêm de $AB = BA$ quando fazemos $B \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Exercício 1.20 Sejam A, B, C matrizes $n \times n$, tais que A e B são invertíveis. Resolva a seguinte equação matricial em X : $AXB = C$.

Resolução: Como A é invertível $A^{-1}A = I$ onde I designa a matriz identidade $n \times n$. Portanto multiplicando à esquerda por A^{-1} obtém-se

$$AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}C \Leftrightarrow IXB = A^{-1}C \Leftrightarrow XB = A^{-1}C.$$

De forma similar, multiplica-se à direita esta última equação por B^{-1} e conclui-se que $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Exercício 1.21 Seja $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$. Prove que

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

Exercício 1.22 Seja $A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 4 \\ -17 & -12 & -7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Verifique que A^3 é a matriz nula. Prove que A não é invertível.

(b) Calcule $(I + A + A^2)(I - A)$.

Resolução: Facilmente se calcula A^3 por definição de produto de matrizes. Supor que A é invertível, então como o produto de matrizes invertíveis é invertível, concluímos que A^2 e A^3 também são invertíveis. Mas A^3 não é invertível. Alternativamente, verifique que $\text{car}(A) = 2 \neq 3$. Donde A não é invertível.

Exercício 1.23 Seja A tal que $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule A .

Resolução: Note que $(7A)^{-1} = C$ significa que $7^{-1}A^{-1} = C$, i.e. $A = 7^{-1}C^{-1}$. Neste caso concreto, $A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.24 Quando possível, inverter as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Usando o método de Gauss-Jordan temos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

Portanto A é invertível porque $\text{car}(A) = 2$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz B não é invertível pois $\text{car}(B) = 1 \neq 2$ assim como a matriz D para quaisquer valores dos parâmetros $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. A matriz C é invertível.

Exercício 1.25 Aproveite a matriz A do exercício 1.24 para resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$.

Resolução: Como A é invertível, de $Ax = b$ obtém-se $x = A^{-1}b$ multiplicando à esquerda por A^{-1} . Portanto pelo exercício 1.24

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.26 Discuta a invertibilidade da matriz A_α , em função do parâmetro α , onde $A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$. Faça a discussão do sistema homogêneo associado $A_\alpha x = 0$.

Exercício 1.27 Sejam x_0 e x_1 duas soluções do sistema linear $Ax = b$. Prove que:

- (a) Para qualquer real λ , $x_\lambda = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1$ é solução de $Ax = b$,
- (b) $x_\lambda - x_{\lambda'}$ é solução do sistema homogêneo associado $Ax = 0$ para quaisquer λ, λ' parâmetros.

Conclua que se $Ax = b$ tiver duas soluções distintas, então o conjunto solução é infinito.

Exercício 1.28 Sendo A uma matriz quadrada e b uma matriz coluna não nula, decida o valor lógica de cada uma das seguintes afirmações:

- (a) Se x é solução de $Ax = b$ e y é solução do sistema homogéneo associado $Ay = 0$, então $x - y$ é solução de $Ax = b$.
- (b) Se x_1 e x_2 são duas soluções de $Ax = b$, então $x - y$ é solução de $Ax = b$.
- (c) Se x_1 e x_2 são duas soluções de $Ax = b$, então $x - y$ é solução de $Ax = 0$.
- (d) Se A é invertível, então $x = 0$ é a única solução de $Ax = 0$.

2 Espaços Lineares (Vectoriais)

2.1 Subespaços lineares

Exercício 2.1 Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são espaços lineares (considere as operações usuais de adição de vectores e multiplicação por escalares):

- (a) $\{(0, 0)\}$.
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$.
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \pi\}$.
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = k\}$.

Resolução: Os subespaços lineares de \mathbb{R}^2 são as rectas que contêm a origem, além dos dois subespaços triviais: $\{(0, 0)\}$ e \mathbb{R}^2 .

Exercício 2.2 Considere o espaço linear $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 são subespaços lineares de V :

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$,
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$,
- (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0, x - y = 0\}$,
- (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d, kx + ly + mz = r\}$.

Exercício 2.3 Seja A uma matriz real $n \times m$. Prove que $V = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

é um subespaço linear de \mathbb{R}^m (isto é: o conjunto das soluções de qualquer sistema homogéneo forma um espaço linear).

Exercício 2.4 Considere V o espaço linear das funções reais de variável real. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de V são subespaços lineares de V :

- (a) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$,
- (b) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ diferenciável e } f'(x) = f(x)\}$ onde f' designa a derivada de f ,
- (c) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ contínua}\}$,
- (d) $\{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ polinómio}\}$,
- (e) $\mathcal{P}_n = \{p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i : \text{ grau de } p \leq n\}$,
- (f) $\{p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i : \text{ grau } p = n\}$,
- (g) $\{p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i : \text{ grau de } p \leq n \text{ e } p(1) = 0\}$.

Exercício 2.5 Considere V o espaço linear das sucessões. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de V são subespaços lineares de V :

- (a) $\{(u_n) : u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\}$,
- (b) $\{(u_n) : u_n \text{ é convergente}\}$,
- (c) $\{(u_n) : u_n \rightarrow 0\}$,
- (d) $\{(u_n) : u_n \rightarrow 1\}$,
- (e) $\{(u_n) : u_n \text{ limitada}\}$,
- (f) $\{(u_n) : u_n \text{ monótona crescente}\}$.

Exercício 2.6 Considere $V = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear das matrizes $n \times n$. Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de V são subespaços lineares de V :

- (a) {matrizes triangulares superiores},
- (b) $\{X \in V : X \text{ é invertível}\}$,
- (c) $\{X \in V : \text{Tr}(X) = 0\}$,
- (d) $\{X \in V : X^T = X\}$ onde X^T denota a transposta da matriz X ,
- (e) $\left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_2 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : x_{12} = x_{22} \right\}$.

2.2 Vectores geradores

Exercício 2.7 Considere em \mathbb{R}^2 o conjunto de vectores $S = \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

- (a) Mostre que o vector $(3, 3)$ é combinação linear de vectores de S .
- (b) Mostre que o vector $(0, 1)$ não é combinação linear de vectores de S .
- (c) Determine a forma geral de vectores $(a, b) \in L(S)$ no espaço gerado por S .

Exercício 2.8 No espaço linear \mathbb{R}^3 considere os vectores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Mostre que os seguintes vectores são combinações lineares de v_1, v_2 e v_3 :

- (a) $v = (3, 3, 3)$ (b) $v = (2, 1, 5)$ (c) $v = (-1, 2, 0)$.

Exercício 2.9 Determine o valor de k para o qual o vector $v = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores $v_1 = (3, 0, -2)$ e $v_2 = (2, -1, -5)$.

Exercício 2.10 Decida quais dos seguintes conjuntos geram \mathbb{R}^3 :

- (a) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$,
- (b) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$,
- (c) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 1, 3)\}$.

Exercício 2.11 Considere, no espaço linear \mathcal{P}_2 dos polinómios de grau menor ou igual a 2, os vectores $p_1(x) = 2 + x + 2x^2$, $p_2(x) = -2x + x^2$, $p_3(x) = 2 - 5x + 5x^2$ e $p_4(x) = -2 - 3x - x^2$. O vector $p(x) = 2 + x + x^2$ pertence à expansão linear $L(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$? Podem p_1, p_2, p_3 e p_4 gerar \mathcal{P}_2 ?

Exercício 2.12 Considere $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ no espaço linear $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Prove que $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ gera V . Escreva $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ como combinação linear de matrizes de S .

2.3 Independência linear

Exercício 2.13 Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes:

Em \mathbb{R}^2 :

(a) $\{(1, 1), (2, 2)\}$,

(b) $\{(1, 1), (1, 2)\}$,

Em \mathbb{R}^3 :

(c) $\{(2, -1, 4), (3, 6, 2), (2, 10, -4)\}$,

(d) $\{(6, 0, -1), (1, 1, 4)\}$,

(e) $\{(4, 4, 0, 0), (0, 0, 6, 6), (-5, 0, 5, 5)\}$.

Exercício 2.14 Determine o único valor de a que torna os seguintes vetores linearmente dependentes:

$v_1 = (1, 0, 0, 2)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (2, 0, 1, a)$.

Exercício 2.15 Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes:

Em \mathcal{P}_2 :

(a) $\{2 - x, 1 + x\}$,

(b) $\{1 + x, 1 + x^2, 1 + x + x^2\}$,

Em \mathcal{P}_3 :

(c) $\{1 + x + x^3, 1 - x - x^2 + x^3, x^2\}$,

(d) $\{1, x, x^2, x^3\}$,

No espaço das funções reais de variável real:

(e) $\{\cos^2(t), \sin^2(t), 2\}$,

(f) $\{t, \cos(t)\}$,

Em $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

(g) $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ onde $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 2.16 (a) Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independente de \mathbb{R}^n e $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Prove que $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$ também é um conjunto de vetores linearmente independente.

(b) Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^3 . Prove que então $w_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $w_2 = 2v_2 + v_3$ e $w_3 = -v_1 + 3v_2 + 3v_3$ são vetores linearmente independentes.

2.4 Bases e dimensão de espaços lineares

Exercício 2.17 (a) Encontre um conjunto de vetores S num espaço linear V tal que S gere V mas com os vetores de S linearmente dependentes.

(b) Encontre um conjunto de vetores S num espaço linear V tal que S não gere V mas com os vetores de S linearmente independentes.

Exercício 2.18 Indique uma base e a respectiva dimensão para cada espaço linear:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x - y = 0\}$.

c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, x - y = 0, y + w = 0\}$.

Exercício 2.19 Considere $V = L(\{v_1, v_2, v_3\})$ onde $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 2, 2, 0)$. Encontre uma base para V e indique a respectiva dimensão.

Exercício 2.20 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$. Determine a dimensão dos seguintes espaços lineares, indicando uma base em cada caso:

- (a) Núcleo de A (b) Espaço linhas de A (c) Espaço colunas de A .

Exercício 2.21 Encontre a característica, bases para o núcleo, espaço das linhas e das colunas das matrizes seguintes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Para cada matriz A verifique que: $\dim \text{Nuc}(A) + \text{car}(A) = \text{número de colunas de } A$.

Exercício 2.22 Encontre bases e respectivas dimensões para os seguintes espaços lineares:

- (a) $V = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\}$;
 (b) $V = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(0) = p(1) = 0\}$;
 (c) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a + 2b = 0 \right\}$;
 (d) $\{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\}$;
 (e) $\left\{ A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \right\}$.

Exercício 2.23 Sejam $E = L(\{(1, 1, 1), (1, 2, 2)\})$ e $F = L(\{(0, 1, -1), (1, 1, 2)\})$.

- (a) Determine a dimensão² de $E + F$.
 (b) Determine a dimensão de $E \cap F$.

Resolução: (a) Temos que $E + F = L(E \cup F) = L(\{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (0, 1, -1), (1, 1, 2)\})$.

Escrevendo as componentes destes vectores como linhas de uma matriz e usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos uma matriz de característica 3 pelo que a dimensão de $E + F$ é 3.

(b) Como os vectores $(1, 1, 1), (1, 2, 2)$ são linearmente independentes, por não serem múltiplos um do outro, a dimensão de E é 2. Analogamente se vê que a dimensão de F é 2. Dado que $\dim E + F = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$ e pela alínea anterior $\dim E + F = 3$, temos que a dimensão de $E \cap F$ é 1.

²Note que em geral se $E = L(\{v_1, \dots, v_p\})$ e $F = L(\{w_1, \dots, w_q\})$ então $E + F = L(\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\})$

Exercício 2.24 Determine a dimensões de $E \cap F$ e $E + F$:

(a) $E = L(\{(1, 1, -1, -1), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2)\})$ e $F = L(\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1)\})$;

(b) $E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0\}$ e $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + w = 0, y + w = 0\}$;

(c) $E = L(\{1 + x + x^2, 1 + x^2\})$ e $F = L(\{3 + 2x + 3x^2\})$ em \mathcal{P}_2 .

2.5 Matriz mudança de base

Exercício 2.25 (a) Seja $BC = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ e $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 0)\}$ duas bases de \mathbb{R}^2 . Encontre a matriz S mudança de base da base BC para a base \mathcal{B} e a matriz P mudança de base da base \mathcal{B} para a base BC . Quais são as coordenadas do vector $v = (3, 4)$ na base \mathcal{B} .

(b) Encontre as coordenadas do vector $v = (1, 2, -3)$ numa base do espaço linear $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ à sua escolha.

Exercício 2.26 (a) Prove que $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ constituem uma base para o espaço linear $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Determine a matriz mudança de base S da base canónica de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ para a base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

(c) Encontre as coordenadas de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ na base canónica de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e na base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

3 Transformações Lineares

Exercício 3.1 Sejam E e F espaços lineares e $T : E \rightarrow F$ uma transformação linear. Prove que então T transforma o vector nulo $\mathbf{0}_E$ de E no vector nulo $\mathbf{0}_F$ de F , i.e. $T(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.

Exercício 3.2 Determine quais das seguintes transformações são lineares:

Em \mathbb{R}^n :

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, y)$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 1, y)$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x, y^2)$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y + z, y - 3z, 0)$

(e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x, 2x + 3y, x + y)$

(f) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x, 2x + 3y, 1)$

Em \mathcal{P}_n na varável x e onde p' designa a derivada de p :

(g) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $T(p)(x) = xp'(x) + p(x)$

(h) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$, $T(p)(x) = x^2p'(x) + p(x + 1)$

(i) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $T(p)(x) = p(x + 1) + p(x - 1)$

(j) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$, $T(p)(x) = p(-1) + p(0) + p(1)$

(l) $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $T(p)(x) = p(0)p'(x)$

Em $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

(m) $T : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b + 2c & 0 \\ 3c + a & d - a \end{bmatrix}$

(n) $T : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $T(X) = X + X^t$

(o) $T : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $T(X) = SX$ onde S é uma matriz fixa

(p) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $T(p) = \begin{bmatrix} p(-1) & p(0) \\ p(0) & p(1) \end{bmatrix}$.

Exercício 3.3 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (3, 3)$ e $T(1, -1) = (1, -1)$. Calcule $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$ e determine a expressão genérica $T(x, y)$.

3.1 Representação matricial de transformações lineares

Exercício 3.4 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$. Em cada alínea, determine a representação matricial $M(T; B, B)$ na base ordenada $B = \{v_1, v_2\}$:

(a) $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$

(b) $v_1 = (2, 0)$, $v_2 = (0, 2)$

(c) $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (1, 0)$

(d) $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$.

Exercício 3.5 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x + z, z + y)$. Em cada alínea, determine a representação matricial $M(T; B, B)$ na base ordenada $B = \{v_1, v_2, v_3\}$:

(a) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$

(b) $v_1 = (0, 3, 0)$, $v_2 = (0, 0, 3)$, $v_3 = (3, 0, 0)$

(c) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$

Exercício 3.6 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y, z + 3y)$. Em cada alínea, determine a representação matricial $M(T; B_1, B_2)$ nas bases ordenadas $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ no espaço de partida e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ no espaço de chegada:

(a) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ $w_1 = (1, 0)$, $w_2 = (0, 1)$

(b) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ $w_1 = (1, 0)$, $w_2 = (0, 1)$

(c) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ $w_1 = (1, 1)$, $w_2 = (0, 1)$

Exercício 3.7 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear que na base canônica é representada pela matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule mediante uma matriz mudança de base apropriada:

(a) a representação matricial de T na base $v_1 = (3, 0)$, $v_2 = (0, 3)$

(b) a representação matricial de T na base $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, 2)$

Exercício 3.8 Encontre as representações matriciais das transformações lineares do exercício 3.2 nas bases canônicas.

3.2 Transformações injectivas/sobrejectivas e bijectivas

Exercício 3.9 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear que na base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ é representada pela matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $T(x, y)$ e verifique se T é uma transformação injectiva ou sobrejectiva.

Exercício 3.10 Considere $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $T(p)(x) = xp'(x) + p(x)$. Encontre a matriz que representa T na base canónica de \mathcal{P}_2 , i.e. $\{1, x, x^2\}$. Será T uma transformação invertível?

Exercício 3.11 Considere as transformações lineares do exercício 3.2.

(a) Indique as que são injectivas ou sobrejectivas. Nos casos em que o espaços de partida e de chegada coincidem e a transformação for bijectiva, determine a transformação T^{-1} inversa.

(b) Se T é não injectiva, então encontre uma base para o núcleo de T .

(b) Se T é não sobrejectiva, então encontre uma base para o imagem de T .

Exercício 3.12 Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y - z).$$

(a) Calcule a matriz que representa T nas bases canónicas.

(b) Calcule uma base para o núcleo de T . A transformação é injectiva?

(c) Calcule uma base para a imagem de T . Será T sobrejectiva?

(d) Resolva a equação linear $T(x, y, z) = (1, 1)$.

(e) Existe algum $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ seja impossível?

(f) Existe algum $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ seja indeterminada?

Exercício 3.13 Decida o valor lógico das seguintes proposições:

(a) Existem transformações lineares injectivas de \mathbb{R}^8 para \mathbb{R}^6 .

(b) Existem transformações lineares sobrejectivas de \mathbb{R}^8 para \mathbb{R}^6 .

(c) Existem transformações lineares injectivas de \mathbb{R}^6 para \mathbb{R}^8 .

(d) Existem transformações lineares sobrejectivas de \mathbb{R}^6 para \mathbb{R}^8 .

(e) Existem transformações lineares injectivas de $\text{Mat}_{2 \times 2}$ para \mathcal{P}_2 .

Exercício 3.14 Seja $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matriz não nula e a transformação $T : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$T(X) = \text{tr}(X)S$$

onde $\text{tr}(X)$ designa o traço da matriz X .

(a) Prove que T é uma transformação linear.

(b) Considere a base canónica $Bc = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Calcule a matriz que representa T nesta base.

(c) Encontre uma base para o núcleo de T e verifique se T é injectiva.

(d) Encontre uma base para a imagem de T e verifique se T é sobrejectiva.

(e) Determine uma base de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ cuja representação matricial de T nessa base seja uma matriz diagonal.

(f) Qual é a matriz mudança de base da base canónica para a base da alínea anterior?

Exercício 3.15 Seja $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por

$$(Tp)(x) = x^2 p''(x) - 2p(x).$$

(a) Calcule a matriz que representa T na base canónica $\{p_1, p_2, p_3\}$ onde

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2.$$

(b) Calcule uma base para o núcleo de T e conclua que T não é injectiva nem sobrejectiva.

(c) Resolva, em \mathcal{P}_2 , a equação linear $x^2 p''(x) - 2p(x) = 1$.

4 Determinante e Aplicações

Exercício 4.1 Seja A uma matriz $n \times n$ e B . Decida se cada afirmação seguinte é verdadeira:

(a) Seja B a matriz que se obtém de A fazendo uma troca de linhas $L_i \longleftrightarrow L_j$ com $i \neq j$. Então $\det(A) = \det(B)$.

(b) Seja B a matriz que se obtém de A multiplicando uma linha de A por um escalar não nulo k . Então $\det(A) = \frac{1}{k} \det(B)$.

(c) Seja B a matriz que se obtém de A substituindo a linha L_i de A por $L_i + \alpha L_j$, para qualquer escalar α . Então $\det(A) = \det(B)$.

(d) Sendo A^t a matriz transposta de A , $\det(A) = \det(A^t)$.

(e) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Exercício 4.2 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tal que $\det(A) = -5$. Calcule

(a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(-2A^{-1})$ (d) $\det((-2A)^{-1})$ (e) $\det(A^3)$ (f) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

Exercício 4.3 Mostre que $\det \begin{bmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$ para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Será que A é invertível para algum $a, b, c \in \mathbb{R}$?

Exercício 4.4 Para que valores de k a matriz A é singular?

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} k-2 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$.

Exercício 4.5 Use a Regra de Laplace para calcular os determinantes das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.6 (a) Calcule $\det(A_x - \lambda I)$ onde $A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde x é um parâmetro real e I

denota a matriz identidade do tipo 4×4 .

(b) Determine os valores de λ (em função de x) para os quais $A_x - \lambda I$ é singular.

(c) Para que valor (ou valores) de x a matrix A_x é invertível?

Exercício 4.7 Seja $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $AA^T = I$.

(a) Prove que $\det(A) = \pm 1$.

(b) Encontre uma matriz A tal que $AA^T = I$ e $\det(A) = -1$.

Exercício 4.8 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $\det(A)$ e justifique que A é invertível.

(b) Escreva a matriz dos cofactores de A , $\text{cof}(A)$.

(c) Use as alíneas anteriores para calcular a inversa de A .

Exercício 4.9 Resolva os seguintes sistemas de equações lineares usando a regra de Cramer.

$$(a) \begin{cases} 7x - 2y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 2x - y = -2 \\ 4x - 3z = -2 \end{cases}$$

(b) Sendo A a matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema linear de (b), calcule a entrada-23 da matriz A^{-1} .

5 Valores Próprios e Vectores Próprios

Exercício 5.1 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x + y).$$

Considere ainda os vectores $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (2, 1)$, $v_3 = (-1, 1)$, $v_4 = (2, 3)$ e $v_5 = (2, 2)$. Identifique os que são vectores próprios e T . Diga ainda quais são os valores próprios associados.

Exercício 5.2 Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (y, y, y).$$

Mostre que os vectores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ determinam um base de \mathbb{R}^3 constituída por vectores próprios de T . Calcule a matriz que representa T nesta base.

Exercício 5.3 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (x + 2y, 3y).$$

(a) Calcule a matriz A que representa T na base canónica de T .

(b) Calcule o polinómio característico de T .

- (c) Determine os espaço próprios e indique as respectivas dimensões.
- (d) Prove que T é diagonalizável e indique uma matriz S tal que SAS^{-1} é uma matriz diagonal.
- (e) Calcule T^9 .

Exercício 5.4 Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ que na base $\{1, x, x^2\}$ é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os valores e vectores próprios de T .
- (b) Diga, justificando, se existe alguma base de \mathcal{P}_2 cuja representação matricial de T é uma matriz diagonal.

Exercício 5.5 Considere a transformação T do exercício 3.14, mas fixando $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Encontre os valores e vectores próprios de T .
- (b) Verifique se T é diagonalizável.

Exercício 5.6 Seja $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_2$ a transformação linear cuja matriz na base canónica é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Prove que $p(x) = 1 - x^2$ e $q(x) = 1 - 2x + x^2$ são vectores próprios de T . Indique os valores próprios associados.
- (b) verifique se T é diagonalizável.

Exercício 5.7 Seja $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ o polinómio característico de uma matriz real do tipo $n \times n$ e $E(\lambda) = \text{Nuc}(A - \lambda I)$. Decida sobre o valor lógico das seguintes proposições:

- (a) Temos $p(\lambda) = 0$ se e só se $\dim \text{Nuc}E(\lambda) \neq 0$.
- (b) A matriz é invertível se e só se 0 e valor próprios de A .
- (c) Se a matriz B se obtém de A aplicando o método de Gauss, então os valores próprios de A e B coincidem.
- (d) Se A é simétrica $A = A^t$, então é diagonalizável.
- (e) Se λ e μ são valores próprios distintos de A , u vector próprio associado ao valor próprio λ , v vector próprio associado ao valor próprio μ , então $u + v$ é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda + \mu$.
- (f) O conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : \dim \text{Nuc}(A - \lambda I) = 0\}$ é infinito.

Exercício 5.8 (a) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, indicando uma matriz diagonal D e matriz mudança de base S tais que $D = SAS^{-1}$.

- (b) Encontre a única solução do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = x_1'(t) \\ -2x_1(t) + 5x_2(t) = x_2'(t) \end{cases}$$

com as condições $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$.

5.1 Alguns exercícios resolvidos

Exercício 5.9 Determine todos os vectores e valores próprios da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ representada em relação à base canónica de \mathbb{R}^2 pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução O polinómio característico de A é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda,$$

pelo que os valores próprios de T (os mesmos que os de A) são $\{0, 5\}$. Resta-nos encontrar os vectores próprios associados a cada valor próprio. O espaço próprio $E(0)$ associado a valor próprio $\lambda=0$ é $E(0) = \text{Nuc}(A - 0I) = \text{Nuc}(A)$, cuja base é $\{(2, 1)\}$. Portanto os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda=0$ são $\{(2a, a)\}$ para qualquer escalar a não nulo.

Finalmente, o espaço próprio $E(5)$ associado ao valor próprio $\lambda = 5$ é

$$E(5) = \text{Nuc}(A - 5I) = \text{Nuc} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

cujas bases são $\{(1, -2)\}$, donde $\{(b, -2b) : b \neq 0\}$ são os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 5$.

Exercício 5.10 Seja $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ matriz invertível.

(a) Prove que 0 não é valor próprio de A .

(b) Encontre os valores e vectores próprios de A^{-1} em função dos de A .

Resolução: (a) Comece por notar que, por definição, 0 é valor próprio de A sse 0 é raiz do polinómio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, i.e. $0 = p(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$. Pelo que 0 é valor próprio de A sse $\det A = 0$, ou seja sse A não é invertível. Conclusão: A invertível sse $p(0) \neq 0$.

(b) Seja λ valor próprio de A . Por (a), $\lambda \neq 0$. Vamos agora provar que $1/\lambda$ é valor próprio de A^{-1} . Usando propriedades dos determinantes temos:

$$\det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}I) = \det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \det(I - \frac{1}{\lambda}A) = \det(A^{-1}) \det(\frac{1}{\lambda}\lambda I - \frac{1}{\lambda}A) =$$

$$\det(A^{-1}) \det\left(\frac{-1}{\lambda}(A - \lambda I)\right) = \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^n \det A^{-1} \det(A - \lambda I),$$

pelo que $\lambda^n \det(A) \det(A^{-1} - 1/\lambda I) = (-1)^n \det(A - \lambda I)$. Portanto λ é valor próprio de A sse $1/\lambda$ é valor próprio de A^{-1} .

Seja v um vector próprio de A associado a um valor próprio λ . Portanto $Av = \lambda v$ por definição. Aplicando a inversa de A em ambos os membros desta igualdade obtemos $A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v$, logo $v = \lambda A^{-1}v$. Portanto $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$. Assim concluímos que v também é vector próprio de A^{-1} associado ao valor próprio $1/\lambda$.

Exercício 5.11 Prove que $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

Resolução: O polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2,$$

pelo que A tem $\lambda = 2$ como único valor próprio (com multiplicidade algébrica dupla). O respectivo espaço próprio $E(2) = \text{Nuc} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ cuja base é formada por um só vector $e_1 = (1, 0)$. Como a multiplicidade geométrica deste valor próprio $\lambda = 2$ não é igual à sua multiplicidade algébrica, conclui-se de imediato que a matriz A não é diagonalizável.

Exercício 5.12 Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

- Encontre os valores próprios de A_α e respectivas multiplicidades algébricas. Diga, quando A_α é invertível e nesse(s) caso(s), calcule os valores próprios de A_α^{-1} .
- Determine base para cada espaço próprio $E(\lambda)$ de A_α .
- Prove que A_α é diagonalizável para qualquer α , e encontre uma matriz mudança de base S_α e matriz diagonal D_α tal que $A_\alpha = S_\alpha^{-1} D_\alpha S_\alpha$.
- Faça a alínea anterior usando a matriz A_α^{-1} (sempre que A_α^{-1} exista).
- Prove que $\langle u, v \rangle = u A_\alpha v^t$ não mune \mathbb{R}^3 com um produto interno (para todo o α).

Resolução: (a) O polinómio característico de A_α é (usando a regra de Laplace):

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \lambda \end{bmatrix} = \left((1 - \lambda)^2 - 4 \right) (\alpha - \lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\alpha - \lambda),$$

pelo que os valores próprios de A_α são $\{-1, 3, \alpha\}$. As multiplicidades algébricas são todas simples, quando $\alpha \notin \{-1, 3\}$. Se $\alpha = -1$ a multiplicidade algébrica de $\lambda = -1$ é dois, e a de $\lambda = 3$ é um. No caso $\alpha = 3$, a multiplicidade algébrica de $\lambda = 3$ é dois, e a de $\lambda = -1$ é um.

A matriz A_α é invertível sse $\alpha \neq 0$, e os valores próprios de A^{-1} são $\{-1, 1/3, 1/\alpha\}$ (ver exercício 5.10).

(b) Caso $\alpha \notin \{-1, 3\}$:

- O espaço próprio associado a $\lambda = -1$ é $E(-1) = \text{Nuc}(A - (-1)I) = \text{Nuc} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{bmatrix}$.

Pelo que a base de $E(-1)$ é $\{(-1, 1, 0)\}$.

- O espaço próprio associado a $\lambda = 3$ é $E(3) = \text{Nuc}(A - 3I) = \text{Nuc} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 \end{bmatrix}$.

Portanto $\{(1, 1, 0)\}$ é uma base para $E(3)$.

- O espaço próprio associado a $\lambda = \alpha$ é $E(\alpha) = \text{Nuc}(A - \alpha I) = \text{Nuc} \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Logo $\{(0, 0, 1)\}$ é uma base para $E(\alpha)$.

Falta investigar dois casos singulares. No caso $\alpha = -1$, $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ forma uma base para $E(-1)$, enquanto $\{(1, 1, 0)\}$ forma uma base para $E(3)$. No caso $\alpha = 3$, $\{(-1, 1, 0)\}$ forma uma base para $E(-1)$, e $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ forma uma base para $E(3)$.

(c) A matriz A_α é diagonalizável para todo o α porque é simétrica $A_\alpha^T = A_\alpha$. (Alternativamente, verifique que a multiplicidade algébrica e geométrica de cada valor próprio coincidem.)

Sendo $S_\alpha = M(id; B_{vp}, Bc)$ a matriz mudança de base, as colunas de S_α são formadas pelos vectores que provêm das bases dos espaços próprios, e as entrada na matriz diagonal D_α são os valores próprios

correspondentes aos vectores próprios em S_α . Assim, e em todos os casos, $S_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_\alpha =$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Note que se A_α representa a transformação linear T_α na base canónica, S_α é a matriz

mudança de base (da base formada por vectores próprios para a base canónica) e D_α representa T_α na base formada pelo vectores próprios (verifique!).

(d) A matriz é invertível sse $\alpha \neq 0$. Os valores próprios de A^{-1} são pelo exercício 5.10, $\{-1, 1/3, 1/\alpha\}$. As bases para os espaços próprios $E(-1)$, $E(1/3)$ e $E(1/\alpha)$ de A^{-1} coincidem (novamente pelo exercício 5.10) com as bases para os espaços próprios $E(-1)$, $E(3)$ e $E(\alpha)$ de A , respectivamente. Temos trivialmente $A_\alpha^{-1} = S_\alpha^{-1} D_\alpha^{-1} S_\alpha$, onde S_α e D_α são as matrizes calculadas em (c).

(e) Observe que A_α têm pelo menos um valor próprio negativo (para qualquer α)!

Exercício 5.13 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

(a) Encontre a solução geral³ do sistema de equações diferenciais $x' = Ax$, onde $x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))$.

(b) Calcule a solução de $x'(t) = Ax(t)$ que passa no ponto $x(0) = (1, 1, 1)$.

Resolução: (a) • Comece por observar que A é simétrica, portanto A é diagonalizável. Vamos encontrar, em primeiro lugar, matriz mudança de base S e matriz diagonal D tais que $S^{-1}AS = D$.

O polinómio característico de A é $p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2$, pelo que os valores próprios de A são $\{0, 2\}$. O vector $(-1, 0, 1)$ forma uma base para $E(0)$, enquanto $(1, 0, 1), (0, 1, 0)$ fornecem uma base para o espaço próprio $E(2)$. Logo

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

• De seguida, vamos resolver o sistema de equações diferenciais $y' = Dy$. Como D é diagonal, a solução geral desta equação é imediata: $y(t) = (c_1 e^{0t}, c_2 e^{2t}, c_3 e^{2t}) = (c_1, c_2 e^{2t}, c_3 e^{2t})$ com c_1, c_2, c_3 constantes.

³No caso geral de uma matriz A diagonalizável, para resolver o sistema de equações diferenciais $x' = Ax$, primeiro lugar encontra-se uma matriz mudança de base $S = M(id, B_{vp}, Bc)$ e matriz diagonal D (formada pelos vectores próprios de A) tais que $D = S^{-1}AS$. De uma forma equivalente, encontra-se a matriz mudança de base $P = M(id, Bc, B_{vp})$ tal que $D = PAP^{-1}$, uma vez que $P = S^{-1}$. Depois, usa-se a mudança de varável $y = S^{-1}x$ e resolve-se a o sistema de equações diferenciais $y' = Dy$, cuja solução geral é $y(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t})$ onde $\lambda_i, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios de A e c_1, \dots, c_n são constantes. Finalmente, a solução geral do sistema inicial $x' = Ax$ é $x = Sy$

• Finalmente, a solução geral de $x' = Ax$ obtém-se da de $y' = Dy$ da seguinte forma

$$x(t) = Sy(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 + c_3 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_1 + c_3 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(b) Já vimos em (a) que a solução geral de $x' = Ax$ é $x(t) = (-c_1 + c_3 e^{2t}, c_2 e^{2t}, c_1 + c_3 e^{2t})$. Falta-nos determinar os valores das constantes c_1, c_2, c_3 , pelo que temos de usar a condição $x(0) = (1, 1, 1)$ da seguinte maneira:

$$(1, 1, 1) = x(0) = (-c_1 + c_3, c_2, c_1 + c_3)$$

donde $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 1$. Portanto $x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = e^{2t}$ e $x_3(t) = e^{2t}$.

Exercício 5.14 No espaço dos polinómios reais de grau menor ou igual a 3, P_3 , considere os vectores $v_1 = 1 + x^3, v_2 = 1 + x^2 + x, v_3 = x - x^3, v_4 = 1 - x$.

(a) Verifique que $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de P_3 .

(b) Sendo $T : P_3 \rightarrow P_3$ a transformação linear tal que

$$T(y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + y_4 v_4) = (y_1 + y_2) v_3 + (y_3 + y_4) v_1$$

determine a imagem, o núcleo e os subespaços próprios de T .

(c) Escreva a matriz C que representa T em relação à base $B_2 = (1, x, x^2, x^3)$ e diga justificando se C é diagonalizável.

(d) Resolva a equação $T(p(x)) = 3v_3$.

Resolução:

(a) Escrevendo as componentes destes vectores em relação à base $B_1 = (1, x, x^2, x^3)$ de P_3 como linhas de uma matriz e usando eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

concluimos que, dado que a dimensão do espaço das linhas da matriz é 4, também a expansão linear $L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ tem dimensão 4 (igual à dimensão de P_3), donde $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de P_3 .

(b) Como $T(v_1) = v_3, T(v_2) = v_3, T(v_3) = v_1, T(v_4) = v_1$, a matriz que representa T em relação à base B (ou seja $M(T; B)$) é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O espaço de colunas desta matriz é $L(\{(0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\})$, e logo $ImT = \{v \in P_3 : v_B \in \mathcal{C}(A)\} = L(\{v_3, v_1\})$. O núcleo de A é

$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z + w = 0\} = \{(-y, y, -w, w) : y, w \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\})$, e logo

$$Nuc T = \{v \in P_3 : v_B \in Nuc(A)\} = L(\{-v_1 + v_2, -v_3 + v_4\}).$$

O polinómio característico $p(\lambda)$ de A é

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \\
&(-\lambda) \left((-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \right) = \\
&= (-\lambda)(-\lambda^3 + \lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1). \text{ Logo os valores pr\u00f3prios de } T \text{ s\u00e3o } 0, 1, -1.
\end{aligned}$$

O subespa\u00e7o pr\u00f3prio associado a 0 \u00e9 o n\u00facleo de T , que j\u00e1 foi determinado.

$$\text{Temos } A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usando elimina\u00e7\u00e3o de Gauss

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

conclu\u00edmos que

$\text{Nuc}(A - 1I) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -x + z = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } w = 0\} = \{(x, 0, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 1, 0)\})$ donde o subespa\u00e7o pr\u00f3prio de V associado a 1 \u00e9 o subespa\u00e7o $L(\{v_1 + v_3\})$.

$$\text{Temos } A + 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando elimina\u00e7\u00e3o de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

conclu\u00edmos que

$\text{Nuc}(A + 1I) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } w = 0\} = L(\{(-1, 0, 1, 0)\})$ donde o subespa\u00e7o pr\u00f3prio de V associado a -1 \u00e9 o subespa\u00e7o $L(\{-v_1 + v_3\})$.

$$\text{(c) Seja } G = M(id; B, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz G^{-1} \u00e9 a matriz $M(id; B_2, B)$ e pode ser determinada (determine!) pelo m\u00e9todo de Gauss-

Jordan ou usando a matriz dos cofactores, i.e.

$$G^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $A = M(T; B)$ temos que $C = M(T; B_2) = GAG^{-1}$ (calcule $C!$).

Dado que, pelas álneas anteriores, sabemos que a soma das dimensões dos subespaços próprios de T é 4, a transformação T é diagonalizável ou seja P_3 admite uma base B_3 constituída por vectores próprios de T . A matriz D de T em relação a esta base é diagonal e C é semelhante a D , por representar T em relação a outra base de P_3 . Logo C é diagonalizável.

(d) As soluções da equação $T(p(x)) = 3v_3$ são exactamente os elementos da imagem completa inversa $T^{-1}(v_3)$. Sabemos que $T(v_1) = v_3$ pelo que $T(3v_1) = 3v_3$ e logo as soluções da equação dada são os elementos de $3v_1 + NucT$. Se quisermos descrever em extensão este conjunto obtemos $3v_1 + NucT = \{(3-a)v_1 + av_2 - bv_3 + bv_4 : a, b \in \mathbb{R}\}$, dado que

$$Nuc T = L(\{-v_1 + v_2, -v_3 + v_4\}) = \{-av_1 + av_2 - bv_3 + bv_4 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ideia para uma resolução alternativa: As coordenadas do vector $3v_3$ em relação à base B são $(0, 0, 3, 0)$ e logo

$$T^{-1}(v_3) = \{v \in V : v_B \text{ é solução de } AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Resolvendo este sistema obtemos o conjunto das soluções pretendido.

6 Produtos Internos

Exercício 6.1 Identifique as aplicações $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que definem um produto interno,

Em \mathbb{R}^2 :

- (a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$.
- (b) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$.
- (c) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1y_1 + 3x_2y_2$.
- (d) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_2y_1y_2 + x_1y_2$.

Em \mathbb{R}^3 :

- (e) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
- (f) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3$.
- (g) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_3x_1y_2 + x_1y_2$.

Exercício 6.2 Determine um produto interno de \mathbb{R}^2 tal que $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 2$. Será único?

Exercício 6.3 No espaço linear $E = Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$, mostre que

$$\langle A, B \rangle = tr(AB^t)$$

define um produto interno em E .

6.1 Complemento, projecções e bases ortogonais

Exercício 6.4 Seja E um espaço Euclidiano de dimensão finita e $F = L(\{u_1, \dots, u_k\})$.

- (a) Prove que o complemento ortogonal $F^\perp = \{u \in E : \langle u, u_1 \rangle = 0, \langle u, u_2 \rangle = 0, \dots, \langle u, u_k \rangle = 0\}$.
- (b) Conclua que se considerarmos o produto interno usual em \mathbb{R}^n e A a matriz $k \times n$ cujas linhas são formadas pelos vectores u_1, \dots, u_k , então $F^\perp = \text{Nuc}A$. Em particular $F^{\perp\perp} = \mathcal{L}(A)$.

Exercício 6.5 Considere \mathbb{R}^3 munido com o produto interno usual e $F = L(\{u_1\})$ onde $u_1 = (1, 1, 1)$.

- (a) Calcule uma base ortonormada para F .
- (b) Calcule uma base para o complemento ortogonal F^\perp de F .
- (c) Calcule uma base ortogonal para o complemento ortogonal de F , i.e. base ortogonal para F^\perp .

Exercício 6.6 Considere \mathbb{R}^3 munido com o produto interno usual e $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

- (a) Calcule uma base ortonormada para F .
- (b) Calcule uma base para o complemento ortogonal F^\perp de F .
- (c) Calcule uma base ortogonal para o complemento ortogonal de F , i.e. base ortogonal para F^\perp .

Exercício 6.7 Considere \mathbb{R}^4 munido com o produto interno usual e $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0\}$.

- (a) Calcule uma base ortogonal para F^\perp .
- (b) Determine a projecção ortogonal de $p = (1, 1, 1, 1)$ sobre F e F^\perp .
- (c) Calcule $\text{dist}(p, F)$ e $\text{dist}(p, F^\perp)$.

Exercício 6.8 Considere em \mathbb{R}^4 o produto interno usual.

- (a) Determine uma base para o complemento ortogonal E^\perp de $E = L(\{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\})$. É uma base ortogonal para E^\perp .
- (b) Determine uma base para o complemento ortogonal de $\text{Nuc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- (c) Calcule o ângulo entre $v = (1, 1, 1, 1)$ e $w = (1, 0, 0, 0)$.

Exercício 6.9 Seja E um subespaço linear de \mathbb{R}^n . Prove que existe uma matriz A tal que $E = \text{Nuc}(A)$.

Exercício 6.10 Em \mathcal{P}_2 , considere a seguinte aplicação $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0),$$

- (a) Prove que esta aplicação define um produto interno em \mathcal{P}_2 .
- (b) Calcule $\|p(x)\|$ para um qualquer polinómio de \mathcal{P}_2 .
- (c) Calcule o ângulo entre os polinómios $p(x) = 1$ e $q(x) = 2 + x^2$.
- (d) Encontre uma base para o complemento ortogonal E^\perp de $E = L(\{p_1(x)\})$ onde $p_1(x) = 1 + x^2$.
- (e) Calcule as distâncias de $p(x) = 1$ a E e a E^\perp , i.e. $\text{dit}(p, E)$ e $\text{dist}(p, E^\perp)$.
- (f) Escrevendo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, encontre uma matriz simétrica A tal que:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Exercício 6.11 No espaço linear $E = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considere o produto interno

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t),$$

e o subespaço linear $F = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : x + w = 0, y - z = 0 \right\}$.

- (a) Encontre uma base para F .
- (b) Encontre uma base para F^\perp .
- (c) Calcule $\text{dist}(A, F)$ onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 6.12 Decida sobre o valor lógico das seguintes proposições:

- (a) Existem produtos internos em \mathbb{R}^2 que satisfazem $\|(1, 0)\| = 0$.
- (b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe um produto interno em \mathbb{R}^2 tal que $\|(1, 0)\| = a$.
- (c) O ângulo entre $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ é $\pi/2$ para qualquer produto interno.
- (d) Seja E um subespaço linear de \mathbb{R}^n . Então $\text{dist}(\mathbf{0}, E) = \text{dist}(\mathbf{0}, E^\perp) = 0$, para qualquer produto interno.
- (e) O $\mathbf{0}$ é o único ponto de \mathbb{R}^n que satisfaz $\text{dist}(\mathbf{0}, E) = \text{dist}(\mathbf{0}, E^\perp) = 0$.
- (f) Se $E \subseteq F$ então $F^\perp \subseteq E^\perp$.
- (g) Para qualquer subespaço linear E do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n temos que $E^\perp \subseteq \{\mathbf{0}\}^\perp$.
- (h) Usando o produto interno usual se $F = \text{Nuc}(A)$, então $F^\perp = \mathcal{L}(A)$.

6.2 Alguns exercícios resolvidos

Exercício 6.13 Em \mathbb{R}^3 , considere o seguinte produto interno:

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = 2xa + xb + ya + yb + zc$$

o qual se fixa em todas as alíneas que se seguem.

- (a) Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é de facto um produto interno em \mathbb{R}^3 .
- (b) Encontre uma base ortogonal para $E = L(\{e_1, e_2\})$ onde $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$.
- (c) Determine uma base para o complemento ortogonal E^\perp . Verifique que $\dim(E) + \dim(E^\perp) = \dim \mathbb{R}^3$.
- (d) Encontre a representação matricial da projecção ortogonal $P_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ na base canónica. Qual é a representação matricial de P_{E^\perp} ?
- (e) Calcule o ponto de E mais próximo de $e_3 = (0, 0, 1)$.
- (f) Calcule a distância de $v = (2, 0, 1)$ a E^\perp .

Resolução (a) Sejam $u = (x, y, z), u' = (x', y', z'), v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O axioma da simetria verifica-se porque $\langle u, v \rangle = 2xa + xb + ya + yb + zc = 2ax + bx + ay + by + cz = \langle v, u \rangle$. Por outro lado,

$$\langle \lambda u + u', v \rangle = 2(\lambda x + x')a + (\lambda x + x')b + (\lambda y + y')a + (\lambda y + y')b + (\lambda z + z')c = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$$

pelo que o axioma da linearidade é verificado. Finalmente, falta provar o axioma da positividade, i.e. $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$ e $\langle u, u \rangle = 0$ sse $u = (0, 0, 0)$. Para esse fim, é suficiente observar que $\langle u, u \rangle = 2x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = x^2 + (x + y)^2 + z^2$.

Resolução alternativa de (a): comece por notar que $\langle u, v \rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

pelo que a simetria e a linearidade são óbvias. Para provar a positividade, é suficiente aplicar o critério:

$$A = A^t, \det[2] > 0, \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0 \text{ e } \det(A) > 0$$

(ou então verifique que os valores próprios de A são todos positivos).

(b) Note, em primeiro lugar, que $\{e_1, e_2\}$ é uma base de E . Aplicamos de seguida o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter a base ortogonal $\{w_1, w_2\}$:

$$w_1 = e_1$$

$$w_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = e_2 - \frac{1}{2} e_1 = \left(\frac{-1}{2}, 1, 0 \right).$$

(c) Por definição $E^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 : \langle u, e \rangle = 0, \text{ para todo o } e \in E\}$. Como e_1, e_2 geram E ,

$$E^\perp = \{u = (x, y, z) : \langle u, e_1 \rangle = 0 = \langle u, e_2 \rangle\} = \{u \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0 = x + y\} = \text{Nuc} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde $e_3 = (0, 0, 1)$ base (ortogonal) de E^\perp .

(d) Note que $P_{E^\perp}(e_1) = (0, 0, 0) = P_{E^\perp}(e_2)$ porque e_1, e_2 pertencem a $(E^\perp)^\perp = E$. Mais, $P_{E^\perp}(e_3) = e_3$

porque $e_3 \in E^\perp$. Logo a matriz \mathcal{P}_{E^\perp} que representa P_{E^\perp} é $\mathcal{P}_{E^\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como $P_E + P_{E^\perp} = I$,

a matriz \mathcal{P}_E que representa P_E na base canónica é $\mathcal{P}_E = I - \mathcal{P}_{E^\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) O ponto de E mais próximo de $e_3 = (0, 0, 1)$ é dado por $P_E(e_3)$. Por (d), $\mathcal{P}_E(e_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Donde $P_E(e_3) = (0, 0, 0)$. Ou então, como $e_3 \in E^\perp$, $P_{E^\perp}(e_3) = e_3$, $P_E(e_3) = (0, 0, 0)$.

(f) A distância é dada por

$$\text{dist}(v, E^\perp) = \|P_E(v)\| = \|(2, 0, 0)\| = \sqrt{\langle (2, 0, 0), (2, 0, 0) \rangle} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Exercício 6.14 Considere em \mathbb{R}^4 o produto interno usual e sejam $E=L((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1))$, $F=L((1, 0, 0, 1))$.

(a) Será que $E^\perp \subseteq F^\perp$? Calcule $\dim E$, $\dim E^\perp$, $\dim F$ e $\dim F^\perp$.

(b) Determine base ortogonal para E .

(c) Determine base ortogonal para E^\perp (o complemento ortogonal de E).

(d) Calcule a distância de $p = (1, 1, 0, 0)$ a F .

(e) Encontre as equações cartesianas da recta \mathcal{R} paralela a F que passa no ponto $p = (1, 1, 0, 0)$.

(f) Encontre as equações do 2-plano \mathcal{P} que passa no ponto $p = (1, 1, 0, 0)$ e é perpendicular a E .

(g) Encontre a matriz que representa $P_{F^\perp} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ na base canónica. Verifique que $P_{F^\perp} \circ P_{F^\perp} = P_{F^\perp}$.

Resolução (a) Sim, porque $F \subset E$. Temos que $\dim E = \dim E^\perp = 2$, $\dim F = 1$ e $\dim F^\perp = 3$.

(b) Sendo $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$ base para E , vamos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ para E :

$$w_1 = v_1 = (1, 0, 0, 1)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \left(\frac{-1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2} \right).$$

(c) Em primeiro lugar temos que encontrar uma base $\{s_1, s_2\}$ de E^\perp , e de seguida apelar ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal $\{t_1, t_2\}$ de E^\perp .

Como v_1, v_2 geram E ,

$$E^\perp = \{u = (x, y, z, w) : \langle u, v_1 \rangle = 0 = \langle u, v_2 \rangle\} = \text{Nuc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas bases são $s_1 = (-1, -1, 0, 1)$ e $s_2 = (0, -1, 1, 0)$. Finalmente, aplicando Gram-Schmidt:

$$t_1 = s_1 = (-1, -1, 0, 1)$$

$$t_2 = s_2 - \frac{\langle s_2, t_1 \rangle}{\langle t_1, t_1 \rangle} t_1 = (0, -1, 1, 0) - \frac{1}{3}(-1, -1, 0, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, 1, \frac{-1}{3}\right).$$

(d) A distância de p a F é $\text{dist}(p, F) = \|P_{F^\perp}(p)\|$. Agora ou se usa uma base ortonormada $\{u_1, u_2, u_3\}$ de F^\perp e então⁴ $P_{F^\perp}(p) = \langle p, u_1 \rangle u_1 + \langle p, u_2 \rangle u_2 + \langle p, u_3 \rangle u_3$, ou se usa o facto de $P_F + P_{F^\perp} = I$, i.e.

$$P_{F^\perp}(p) = p - P_F(p) = p - \frac{\langle p, (1, 0, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle} (1, 0, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{-1}{2}\right).$$

Portanto $\text{dist}(p, F) = \sqrt{6}/2$.

(e) Primeiro vamos encontrar uma base para F^\perp . Como estamos a usar o produto usual de \mathbb{R}^4 , temos que $F^\perp = \text{Nuc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, cuja base é $\{(-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$. Donde $F = \{(x, y, z, w) : -x + w = 0, y = 0, z = 0\}$. Como a recta \mathcal{R} é paralela a F , as equações de \mathcal{R} obtêm-se das de F impondo a condição $p \in \mathcal{R}$ (originando eventualmente equações não homogêneas). Facilmente se constata que as equações cartesianas de \mathcal{R} são: $-x + w = -1, y = 1, z = 0$.

Note que $F = \text{Nuc} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) Vimos em (b) que $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ é uma base de E , pelo que as equações cartesianas de E^\perp são: $x + w = 0, y + z + w = 0$. Como o 2-plano \mathcal{P} é paralelo a E^\perp e $p \in \mathcal{P}$, concluímos que as equações cartesianas de \mathcal{P} são: $x + w = 1, y + z + w = 1$.

(g) Como $\dim F$ é menor que $\dim F^\perp$, vamos encontrar a matriz que representa P_F e depois usa-se o facto de $P_{F^\perp} = I - P_F$. Sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canónica de \mathbb{R}^4 , $P_F(e_i) = \frac{\langle e_i, (1, 0, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle} (1, 0, 0, 1)$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Pelo que

$$P_F(e_1) = (1/2, 0, 0, 1/2), \quad P_F(e_2) = (0, 0, 0, 0), \quad P_F(e_3) = (0, 0, 0, 0), \quad P_F(e_4) = (1/2, 0, 0, 1/2).$$

Pelo que a matriz que representa P_{F^\perp} é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.15 Seja E um espaço Euclideano de dimensão n , F um subespaço linear de E , $P_F : E \rightarrow E$ a projecção ortogonal sobre F e \mathcal{P}_F a matriz que representa P_F numa base de E .

(a) Prove que o conjunto dos valores próprios de P_F é um subconjunto de $\{0, 1\}$.

(b) Será \mathcal{P}_F diagonalizável?

⁴Recorde que dada uma base ortonormada $\{u_i\}$ de um espaço E , $P_E(w) = \sum_i \langle w, u_i \rangle u_i$. De forma similar, dada uma base ortonormada $\{v_j\}$ de E^\perp , $P_{E^\perp}(w) = \sum_j \langle w, v_j \rangle v_j$. Mais: $P_E(w) + P_{E^\perp}(w) = w$ para todo o vector w .

Resolução: Se $F=E$ ou $F=\{0_E\}$ o exercício é trivial. Para fazer os outros casos observe que se λ é valor próprio de P_F então λ^2 também é valor próprio de P_F^2 . De seguida use o facto de $P_F^2=P_F$. Finalmente P_F é diagonalizável, tomando, p. ex., a base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_{F^\perp}$ de E , onde \mathcal{B}_F (resp. \mathcal{B}_{F^\perp}) é uma base de F (resp. F^\perp). Indique então S e D tais que $S^{-1}P_F S = D$, com D matriz diagonal.

Exercício 6.16 Prove que a distância de um ponto (x_0, y_0, z_0) ao plano \mathcal{P}_d de equação $ax + by + cz = d$ é

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}.$$

Resolução: O plano \mathcal{P}_0 que passa na origem $(0, 0, 0)$ e é paralelo a \mathcal{P}_d tem equação cartesiana dada por $ax + by + cz = 0$. Por outro lado $\{(a, b, c)\}$ é uma base para o complemento ortogonal \mathcal{P}_0^\perp e $(0, 0, d/c) \in \mathcal{P}_d$ se $c \neq 0$. Note que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, pelo que se $b \neq 0$, podemos usar o ponto $(0, d/b, 0) \in \mathcal{P}_d$, ou ainda $(a/d, 0, 0) \in \mathcal{P}_d$ se $a \neq 0$. Portanto (denotando por $P_{\mathcal{P}_0^\perp}$ a projecção ortogonal sobre \mathcal{P}_0^\perp) temos

$$\text{dist}\left((x_0, y_0, z_0), \mathcal{P}_d\right) = \|P_{\mathcal{P}_0^\perp}((x_0, y_0, z_0) - (0, 0, d/c))\| = \left\| \frac{\langle (x_0, y_0, z_0 - d/c), (a, b, c) \rangle}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c) \right\|$$

donde o resultado.

6.3 Formas quadráticas

Exercício 6.17 Classificar as seguintes formas quadráticas, em definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas ou indefinidas:

(a) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

(b) $Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$.

(c) $Q(x, y) = -3x^2 + 2yx - 2y^2$.

(d) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4yx$.

(e) $Q(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$, onde α é um parâmetro.

Exercício 6.18 Seja A uma matriz real simétrica $n \times n$. Prove que A^2 é definida positiva se e só se A for invertível (não singular).