Instituto Superior Técnico, Departamento de Matemática
Álgebra Linear, LEIC, 2007/2008 (primeiro semestre)
Repescagens dos testes: 11 de Janeiro de 2008 (9h)
Repescagem do teste 1 = Grupo I
Repescagem do teste 2 = Grupo II
Duração: 90 minutos (apenas um grupo); ou 3 horas (ambos os grupos)

Identificação (a preencher pelo aluno)

Número:____________

Nome:____

Classificações (a preencher pelos docentes)

Alínea		Classificação
I.1		2.0
I.2		4.0
I.3		4.0
I.4		3.0
I.5		3.0
I.6		2.0
I.7		2.0
II.1	a	2.0
	b	2.0
	c	3.0
II.2	a	3.0
	b	1.0
	c	3.0
II.3		3.0
II.4		3.0

TOTAL: 20.0 + 20.0

Justifique cuidadosamente ***todas*** *as respostas.*

Grupo I (20 valores)

1. Sejam a matriz A_α, em que α é um número real, e a matriz B definidas por:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1+\alpha & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Determine a característica e a dimensão do núcleo da matriz A_α em função do valor de α.

2. Para o caso $\alpha = 1$ determine a solução geral do sistema $A_\alpha X = B$.

3. Para o caso $\alpha = 0$ determine bases para o espaço das colunas, para o espaço das linhas e para o núcleo de A_α.

4. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Calcule o determinante de M, a matriz dos co-factores de M e, se existir, a matriz inversa de M.

5. Mostre que os vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,0,1) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1,2,0) \\ \boldsymbol{v}_3 &= (0,1,2) \end{aligned}$$

   formam uma base de $\mathbb{R}^3$ e calcule as coordenadas de $(1,2,3)$ na base ordenada $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$.

6. Seja V um espaço vectorial real e $x, y, z \in V$. Sendo $f : V \to \mathcal{P}_2$ um isomorfismo tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + t^2 \\ f(y) &= 1 + 2t \\ f(z) &= t + 2t^2 \end{aligned}$$

   diga se $\{x, y, z\}$ é uma base de V.

7. Um plano $P \subset \mathbb{R}^3$ tem equação cartesiana $x + 2y - 3z = 1$. Determine $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tais que $P = \boldsymbol{p} + L(\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\})$.

Justifique cuidadosamente ***todas*** *as respostas.*

Grupo II (20 valores)

1. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por
$$T(x,y,z,w) = (x - z + w, 2x + 2y - z + w, 2y + z - w)\ .$$
   a) Mostre que T é uma transformação linear representada, em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, pela matriz A_0 do exercício I.3:
$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
   b) Obtenha uma base do contradomínio de T e uma base do núcleo de T.
   c) Obtenha a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$ e à base ordenada $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vectores do exercício I.5:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2,0,1) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1,2,0) \\ \boldsymbol{v}_3 &= (0,1,2) \end{aligned}$$

2. Considere a matriz M do exercício I.4:
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
   a) Calcule os valores próprios de M e as respectivas multiplicidades algébricas. (**Atenção:** apenas um dos valores próprios é um número real.)
   b) Diga se a matriz M é diagonalizável.
   c) Diga quais são as multiplicidades geométricas dos valores próprios e calcule um vector próprio associado ao único valor próprio real.

3. Dados os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$,
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1,0,1,0) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2,1,3,1) \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1,1,2,1) \\ \boldsymbol{v}_4 &= (0,1,1,1) \end{aligned}$$
   calcule uma base ortonormal de $L(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\})$ (em relação ao produto interno habitual de $\mathbb{R}^4$).

4. Seja $\varphi : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \times \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB^T)\ .$$
   Mostre que φ é um produto interno em $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ em relação ao qual a base canónica de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ é ortonormal.