Instituto Superior Técnico, Departamento de Matemática
Álgebra Linear 2007/2008, primeiro semestre, LEIC
Primeiro teste: 24 de Novembro de 2007 (9h)
Duração: 1 hora e 30 minutos

Identificação (a preencher pelo aluno)

Número:____________

Nome:____

Classificações (a preencher pelos docentes)

Alínea		Classificação
I.1	a	1.0
	b	2.0
I.2	a	2.0
	b	1.0
I.3	a	1.0
	b	1.0
II.1	a	1.0
	b	1.0
	c	1.0
	d	1.0
II.2	a	0.5
	b	0.5
	c	1.0
II.3		2.0
III.1	a	0.7
	b	0.7
	c	0.6
III.2		2.0
III.3		2.0
III.4		2.0

TOTAL: 20.0

Respostas (a preencher pelo aluno)

Pergunta I.1

Continua em A.___

Pergunta I.2

Continua em A.___

Pergunta I.3

Continua em A.___

Pergunta II.1

*Continua em A.*___

Pergunta II.2

Continua em A.___

Pergunta II.3

Continua em A.___

Pergunta III.___

Continua em A.___

Pergunta III.___

Continua em A.___

A.1

*Continua em A.*___

A.2

Continua em A.___

$\boxed{\textbf{A.3}}$

*Continua em A.*___

A.4

*Continua em A.*___

A.5

Continua em A.___

Grupo I (8 valores)

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y - 3z = 4 \\ x + 6y + 3z = 12 \end{cases}$

   a) Escreva a matriz dos coeficientes do sistema e a matriz aumentada do sistema.

   b) Aplicando eliminação de Gauss à matriz aumentada, diga se o sistema é possível ou impossível e, no caso de ser possível, diga qual é o grau de indeterminação e obtenha a solução geral.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) Obtendo, uma única vez, uma matriz em escada de linhas a partir de A por eliminação de Gauss, calcule bases para: (i) $\mathrm{Nuc}(A)$; (ii) $\mathrm{Col}(A)$; (iii) $\mathrm{Lin}(A)$.

   b) Obtenha equações cartesianas para $\mathrm{Col}(A)$.

3. Seja $S = \{1 - x + x^2, 2 + 2x + 6x^2, 3 - 3x + 3x^2\} \subset \mathcal{P}_2$.

   a) Diga, justificando, se S é linearmente independente.

   b) Calcule uma base de $L(S)$ contida em S.

Grupo II (8 valores)

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

   a) Calcule, quando for possível: AB, BA, AC, CA, BC, CB.

   b) Calcule, por eliminação de Gauss–Jordan, nos casos em que for possível: A^{-1}, C^{-1}.

   c) Calcule $\det A$ e $\det C$ sem usar a fórmula de Laplace.

   d) Calcule os co-factores da linha 2 de C e use-os para, aplicando a fórmula de Laplace, verificar o valor de $\det C$ obtido na alínea anterior.

2. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1,1,1) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2,1,1) \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,5,7) \end{aligned}$$

   a) Mostre que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Qual é a matriz de mudança de base (da base canónica para a nova base)?
   c) Calcule as coordenadas de $(1,2,3)$ na base ordenada $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$.

3. Obtenha um conjunto de equações cartesianas para o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $(1,1,-1)$, $(2,1,0)$ e $(1,3,5)$.

Grupo III (4 valores)

RESPONDA A DUAS PERGUNTAS:

1. Considere o conjunto com quatro elementos distintos $X = \{a,b,c,d\}$ e as operações binárias $\star$ e $\bullet$ definidas pelas tabelas seguintes:

$\star$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	c	c	d
c	a	c	d	b
d	b	d	b	c

   a) As operações $\star$ e $\bullet$ são comutativas? Justifique.
   b) Indique, quando existir, o elemento neutro de cada operação.
   c) Diga, justificando, se o conjunto X, com as operações $\star$ e $\bullet$, é um corpo.

2. Diga, justificando, se o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x+1) = 2f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ é um subespaço do espaço vectorial real $[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ das funções reais de variável real.

3. Seja $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ uma matriz não-singular. Mostre que é um isomorfismo a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que a cada vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ atribui o vector $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ definido por $Y = AX$.

4. Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo K e sejam B_1, B_2 e B_3 bases ordenadas de V. Sabendo que a matriz de mudança de base de B_1 para B_2 é S e que a matriz de mudança de base de B_2 para B_3 é T, obtenha, em função de S e T, a matriz de mudança de base de B_1 para B_3.