Instituto Superior Técnico, Departamento de Matemática
Álgebra Linear 2007/2008, primeiro semestre, LEIC
Segundo teste: 15 de Dezembro de 2007 (9h)
Duração: 1 hora e 30 minutos

Identificação (a preencher pelo aluno)

Número:____________

Nome:____

Classificações (a preencher pelos docentes)

Alínea		Classificação
1	a	2.0
	b	2.0
	c	2.0
2	a	1.5
	b	1.0
	c	1.5
3	a	2.0
	b	2.0
4	a	2.0
	b	2.0
	c	2.0

TOTAL: 20.0

Respostas (a preencher pelo aluno)

$\boxed{\textbf{Alínea 1a}}$ Escrevendo $T(x,y,z)$ como matriz coluna, tem-se

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -y+2z \\ -2z \\ 0 \end{bmatrix} &= x\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Portanto T é a função que a cada vector $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ faz corresponder (representando os vectores como matrizes coluna) $A\boldsymbol{x}$, onde A é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Isto mostra que T é uma transformação linear e que a matriz que a representa na base canónica de $\mathbb{R}^3$ é A.

$\boxed{\textbf{Alínea 1b}}$ A matriz de mudança de base (da base canónica para a nova base ordenada) é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Portanto a matriz de T na nova base é $A' = S^{-1}AS$. Para a calcular directamente sem ter de calcular a inversa de S notamos que se tem $SA' = AS$ e aplicamos o método de eliminação de Gauss–Jordan à matriz aumentada $[S|AS]$, o que conduzirá à matriz $[I|S^{-1}AS]$. Primeiro calculamos o produto AS:

$$AS = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E agora a eliminação:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] . \end{aligned}$$

Portanto a matriz de T na nova base é

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$\boxed{\textbf{Alínea 1c}}$ O núcleo de T corresponde ao núcleo da matriz A e o contradomínio de T corresponde ao espaço das colunas da matriz A. Uma vez que A é uma matriz em escada de linhas, uma base do seu espaço das colunas é formada pelas colunas com pivot, e portanto—atendendo a que A é a matriz que representa T *na base canónica*—uma base do contradomínio de T é o conjunto

$$\{(-1, 0, 0), (2, -2, 0)\} .$$

Para obter uma base do núcleo obtemos na forma paramétrica a solução geral do sistema homogéneo cuja matriz dos coeficientes é A. Sendo as variáveis x, y e z correspondentes às colunas 1, 2 e 3 de A, a primeira coluna não tem pivot e portanto x pode ser tomada para variável independente. Temos então as equações $-y + 2z = 0$ e $-2z = 0$, pelo que $y = z = 0$ e assim tem-se a solução geral (em forma de matrizes coluna)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Portanto uma base do núcleo de T é o conjunto

$$\{(1, 0, 0)\} .$$

$\boxed{\textbf{Alínea 2a}}$ Vamos ver que F é uma transformação linear pela definição, ou seja, vendo que F preserva somas de vectores e produtos por escalares. Dados $p, q \in \mathcal{P}_2$ e $a \in \mathbb{R}^3$ tem-se:

$$\begin{aligned}
F(p+q) &= (p+q)'' - (p+q)') = p'' + q'' - (p' + q') = p'' - p' + q'' - q' \\
&= F(p) + F(q) \; ; \\
F(ap) &= (ap)'' - (ap)' = ap'' - ap' = a(p'' - p') \\
&= aF(p) \; .
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Alínea 2b}}$ As imagens por F dos vectores da base canónica de $\mathcal{P}_2$ são:

$$\begin{aligned} F(1) &= 0 \\ F(t) &= -1 \\ F(t^2) &= 2-2t \end{aligned}$$

A matriz de F na base canónica é a matriz A cuja primeira coluna é a matriz coluna das coordenadas de $F(1)$ na base canónica; cuja segunda coluna é a matriz coluna das coordenadas de $F(t)$ na base canónica; e cuja terceira coluna é a matriz coluna das coordenadas de $F(t^2)$ na base canónica. Portanto A coincide com a matriz A da alínea 1a:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{Alínea 2c}}$ A equação diferencial $p'' - p' = t$ é a equação linear $F(p) = t$. O isomorfismo de $\mathcal{P}_2$ para $\mathbb{R}^3$ que é determinado pela base canónica de $\mathcal{P}_2$ (ou seja, o que faz corresponder a cada polinómio $a+bt+ct^2$ o vector (a,b,c)) torna esta equação linear equivalente ao sistema linear $AX = B$ onde X é a matriz coluna dos coeficientes do polinómio $a+bt+ct^2$ e B é a matriz coluna das coordenadas de t. Aplicando eliminação de Gauss à matriz aumentada deste sistema obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] ,$$

pelo que a solução geral do sistema é definida pelas condições

$$\begin{aligned} a &\in \mathbb{R} , \\ b &= -1 , \\ c &= -1/2 . \end{aligned}$$

Portanto o conjunto dos polinómios de $\mathcal{P}_2$ que são soluções da equação diferencial dada é

$$\{(a - t - t^2/2) \in \mathcal{P}_2 : a \in \mathbb{R}\} .$$

$\boxed{\textbf{Alínea 3a}}$ O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda)+1] \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) \\
&= (3-\lambda)(\lambda-3)^3 \\
&= -(\lambda-3)^2 \,.
\end{aligned}$$

Portanto o único valor próprio de A é 3 e a sua multiplicidade algébrica é 3.

$\boxed{\textbf{Alínea 3b}}$ O espaço próprio do (único) valor próprio é

$$E(3) = \mathrm{Nuc}(A - 3I) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

A característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é 1 e portanto a nulidade é 2. Logo, a multiplicidade geométrica do valor próprio é apenas 2, pelo que a matriz A não é diagonalizável; ou seja, não existe uma matriz não-singular S tal que $S^{-1}AS$ é uma matriz diagonal.

$\boxed{\textbf{Alínea 4a}}$ $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ é uma combinação linear de produtos $x_i y_j$ em que x_i é uma componente de $\boldsymbol{x}$ e y_j é uma componente de $\boldsymbol{y}$, tendo-se por isso

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

onde G é a matriz

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Isto mostra que a função $\langle -, - \rangle$ é uma forma bilinear e que, se for um produto interno, G é a sua métrica. Para ser produto interno falta mostrar que $\langle -, - \rangle$ é simétrica e definida positiva. A simetria é imediata, pois resulta da simetria de G. Para ver que é definida positiva, vamos calcular $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ para um vector arbitrário $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 2x^2 - xy - yx + y^2 + z^2 = x^2 + (x^2 - 2xy + y^2) + z^2 = x^2 + (x - y)^2 + z^2 .$$

Portanto tem-se $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ porque $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ é uma soma de quadrados e tem-se $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ se e só se

$$x = x - y = z = 0 ,$$

ou seja, se e só se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Portanto $\langle -, - \rangle$ é um produto interno e G é a sua métrica.

$\boxed{\textbf{Alínea 4b}}$ A projecção ortogonal $\boldsymbol{p}$ pretendida é

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= \frac{\langle (2,0,0),(1,1,1)\rangle}{||(1,1,1)||^2}(1,1,1) \\
&= \frac{\langle (2,0,0),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) \\
&= \frac{2\times 2\times 1 - 2\times 1 - 0\times 1 + 0\times 1 + 0\times 1}{2\times 1\times 1 - 1\times 1 - 1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1}(1,1,1) \\
&= \frac{2}{2}(1,1,1) \\
&= (1,1,1)\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{Alínea 4c}}$ Um vector ortogonal a $(1,1,1)$ pode ser obtido subtraindo a $(2,0,0)$ a projecção ortogonal $\boldsymbol{p}$ da alínea anterior:

$$(2,0,0) - \boldsymbol{p} = (1,-1,-1) \ .$$

A norma deste vector (para o produto interno desta pergunta) é

$$||(1,-1,-1)|| = \sqrt{\langle(1,-1,-1),(1,-1,-1)\rangle} =$$

$$\sqrt{2\times 1\times 1 - 1\times(-1) - (-1)\times 1 + (-1)\times(-1) + (-1)\times(-1)} = \sqrt{6} \ .$$

O vector pedido por ser, então, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Nota: Outra forma de resolver seria escolher um vector (x,y,z) com norma 1 tal que $\langle(x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0$, ou seja, tal que $2x - x - y + y + z = 0$, ou seja, tal que $x + z = 0$. Um vector nestas condições é, por exemplo, $(0,1,0)$, cuja norma ao quadrado é $2\times 0\times 0 - 0\times 1 - 1\times 0 + 1\times 1 + 0\times 0 = 1$, tal como pretendido.

IST, ÁLGEBRA LINEAR (LEIC), TESTE 2, 15/12/2007

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por

$$T(x, y, z) = (-y + 2z, -2z, 0) \; .$$

   a) Mostre que T é uma transformação linear e obtenha a matriz que a representa na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   b) Obtenha a matriz que representa T na base ordenada

$$((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)) \; .$$

   c) Calcule uma base do contradomínio de T e uma base do núcleo de T.

2. Seja $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a função que a cada polinómio $p(t)$ faz corresponder o polinómio $p''(t) - p'(t)$.

   a) Mostre que F é uma transformação linear.

   b) Obtenha a matriz que representa F na base canónica de $\mathcal{P}_2$.

   c) Calcule o conjunto de todos os polinómios $p \in \mathcal{P}_2$ que são soluções da equação diferencial $p''(t) - p'(t) = t$.

3. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

   b) Obtenha, se existir, uma matriz não-singular S tal que $S^{-1}AS$ seja uma matriz diagonal, ou apresente uma razão pela qual não pode existir uma tal matriz S.

4. Considere a função que a cada par de vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ faz corresponder o escalar

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \; .$$

   a) Mostre que esta função define um produto interno em $\mathbb{R}^3$ e calcule a sua métrica na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcule, para este produto interno, a projecção ortogonal de $(2, 0, 0)$ sobre $(1, 1, 1)$.

   c) Obtenha um vector não nulo que, para este produto interno, tenha norma igual a 1 e seja ortogonal a $(1, 1, 1)$.