Instituto Superior Técnico, Departamento de Matemática
Álgebra Linear 2006/2007, segundo semestre, agrupamentos AL-14 e AL-23
Segundo exame, 4 de Julho de 2007
Duração: 3 horas

Identificação (a preencher pelo aluno)

Número:____________

Nome:____

Classificações (a preencher pelos docentes)

Alínea		Classificação
I.1	a	
	b	
	c	
	d	
	e	
	f	
I.2	a	
	b	
	c	
	d	
	e	
	f	
	g	
I.3	a	
	b	
	c	
	d	
I.4	a	
	b	
	c	
	d	
	e	
	f	
II		

TOTAL: ____________

Respostas (a preencher pelo aluno)

I.1(a)

Continua em A.___

I.1(b)

Continua em A.___

$\boxed{\textbf{I.1(c)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.1(d)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.1(e)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.1(f)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.2(a)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.2(b)}}$

*Continua em A.*___

I.2(c)

Continua em A.___

I.2(d)

Continua em A.___

I.2(e)

*Continua em A.*___

I.2(f)

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.2(g)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.3(a)}}$

*Continua em A.*___

I.3(b)

Continua em A.___

I.3(c)

Continua em A.___

I.3(d)

*Continua em A.*___

I.4(a)

*Continua em A.*___

I.4(b)

Continua em A.___

I.4(c)

Continua em A.___

$\boxed{\textbf{I.4(d)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.4(e)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{I.4(f)}}$

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{II}}$

*Continua em A.*___

A.1

Continua em A.___

A.2

Continua em A.___

A.3

*Continua em A.*___

A.4

*Continua em A.*___

$\boxed{\textbf{A.5}}$

Continua em A.___

$\boxed{\textbf{A.6}}$

Continua em A.___

$\boxed{\textbf{A.7}}$

Continua em A.___

$\boxed{\textbf{A.8}}$

Continua em A.___

A.9

Continua em A.___

A.10

Continua em A.___

Grupo I (17 valores)

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   a) Diga, justificando, se o sistema $A \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$ é possível.

   b) A que condições devem satisfazer x, y e z para que o sistema $A \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ seja possível? Diga também se o sistema pode ser determinado.

   c) Qual é a nulidade e a característica de A? A matriz A tem inversa?

   d) Calcule os produtos $A^T A$ e $A^T \boldsymbol{b}$ e resolva o sistema

   $$A^T A \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = A^T \boldsymbol{b} \, .$$

   e) Obtenha uma matriz B tal que $\mathrm{Col}(B) = \mathrm{Nuc}(A)$.

   f) Tem-se $\mathrm{Col}(B) = \mathrm{Nuc}(A^T A)$? Justifique.

2. Seja $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) Calcule a matriz $\mathrm{Cof}\, C$ dos co-factores de C.

   b) Calcule o determinante de C.

   c) Diga se a matriz C tem inversa e em caso afirmativo calcule-a.

   d) Calcule o traço de C.

   e) Mostre que $(1, 1, 1)$ é um vector próprio de C e justifique que o valor próprio que lhe está associado é 3.

   f) Obtenha os restantes valores próprios e indique as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

   g) A matriz C é diagonalizável? Justifique e, em caso afirmativo, apresente uma matriz de mudança de base S tal que $S^{-1}CS$ seja diagonal.

3. Seja $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ a função que a cada polinómio $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ faz corresponder o polinómio $p' - xp''$, onde p' e p'' são respectivamente a primeira e a segunda derivadas de p em ordem a x.

   a) Mostre, recorrendo directamente à definição, que T é uma transformação linear.
   b) Calcule $T(1)$, $T(x)$, $T(x^2)$ e $T(x^3)$ e diga qual é a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathcal{P}_3$.
   c) Obtenha uma base do núcleo de T.
   d) Obtenha uma base do contradomínio de T.

4. Seja $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ a função definida, para quaisquer dois polinómios $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, por

$$\varphi(p, q) = p(0)\overline{q(0)} + p(i)\overline{q(i)} + p(-i)\overline{q(-i)} \ .$$

   a) Mostre, recorrendo à definição, que φ é um produto interno.
   b) Calcule, para o produto interno φ, a norma do polinómio

$$p(z) = 1 + iz - iz^2 \ .$$

   c) Calcule os seguintes produtos internos dos vectores da base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$:

$$\varphi(1,1),\ \varphi(1,z),\ \varphi(1,z^2),\ \varphi(z,z),\ \varphi(z,z^2),\ \varphi(z^2,z^2) \ .$$

   d) Escreva a matriz M que representa φ em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ (ou, seja, a métrica de φ).
   e) Diga, justificando, se a base canónica $\{1, z, z^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ é uma base ortogonal para o produto interno φ.
   f) Recorrendo ao método de ortogonalização de Gram–Schmidt obtenha, relativamente ao produto interno φ, uma base ortogonal $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ tal que $\boldsymbol{u}_1 = 1$ e $L(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}) = L(\{1, z\})$.

Grupo II (3 valores)

Sejam U e V os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U &= L(\{(0,1,2),(1,0,3)\}) \\ V &= L(\{(1,1,1),(1,-1,2),(2,0,3)\}) \end{aligned}$$

Calcule a dimensão e uma base de $U \cap V$.