# Jogos de Estratégia: *Álgebra Linear aplicada aos jogos de 2 jogadores de soma nula*

Projeto desenvolvido para apresentação na prova oral de Álgebra Linear

João Canas

Instituto Superior Técnico

Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial

Semestre 1, 2013/2014

---

A teoria dos jogos tornou-se num ramo proeminente da matemática nos anos 30, e ainda mais quando se deu a publicação do livro "*The Theory of Games and Economic Behavior*" de John von Neumann e Oskar Morgenstern em 1944. Desde então tem sido aplicada nas mais diversas áreas como a economia, as ciência politica e militar ou o jornalismo. Mais recentemente tem sido utilizada pela ciência da computação no desenvolvimento de inteligência artificial e cibernética.

Um jogo de estratégia será aquele em que cada jogador decide uma jogada de entre um conjunto de possibilidades sem saber qual o movimento que o adversário irá realizar. Do conjunto das duas opções irá haverá um retorno para cada jogador. O facto de se tratarem de jogos de soma nula significa que o retorno para um jogador e simértrico do retorno para o adversário (ex.: se A ganha 2 pontos, B perde 2 pontos).

Este trabalho irá centrar-se na otimização de estratégias em jogos estritamente determinados e em casos particulares de jogos não estritamente determinados.

A título de exemplo temos o problema que se segue:

Duas companhias aéreas (X e Y) pretendem saber quais das várias alternativas de horários de voos serão preferíveis de modo a garantirem um maior número de clientes de entre os 200000 passageiros que fazem uma determinada viagem anualmente. A companhia A tem como alternativas os horários **1**, **2** ou **3** e a companhia B tem como alternativas os horários a, b ou c.

Foram feitos alguns estudos de mercado que mostram que num dia, caso a companhia X opte por **1**, terá 70% dos passageiros se Y optar por **a**, 65% se Y optar por **b** e 40% se Y optar por **c**. Caso X opte por **2**, terá 80% dos passageiros se Y optar por **a** e 60% nas restantes situações (**b** ou **c**). Se X optar por **3**, terá 45% dos passageiros caso Y opte por **a** ou por **b** e 55% caso Y opte por **c**.

Vamos começar por fazer algumas definições que ajudam a resolução de um problema deste tipo.

Chama-se matriz de jogo à matriz em que a cada linha corresponde uma jogada possível do jogador L e a cada coluna corresponde uma jogado do jogador C. A entrada $a_{ij}$ corresponde ao retorno para o jogador L caso L escolha i e C escolha j.

Chamam-se estratégias aos vetores $l = [l_1 \quad . \quad . \quad . \quad l_n]$ e $c = [c_1 \quad . \quad . \quad . \quad c_m]$ cujas entradas correspondem à quantidade de vezes que L e C utilizam os movimentos correspondentes aos índices. As estratégias podem ser puras ou mistas consoante e utilizado sempre o mesmo movimento ou não.

No caso do exemplo, a matriz do jogo seria $X = \begin{bmatrix} 70 & 65 & 40 \\ 60 & 75 & 75 \\ 45 & 45 & 55 \end{bmatrix}$ para a companhia X e $Y = \begin{bmatrix} 30 & 35 & 60 \\ 40 & 25 & 25 \\ 55 & 55 & 45 \end{bmatrix}$ para a companhia Y.

Para transformarmos este jogo num jogo de soma nula, basta considerar que cada companhia tem à partida 50% dos passageiros e que consoante a estratégia escolhia perde ou ganha passageiros.

Ficamos assim com a matriz $A = \begin{bmatrix} 20 & 15 & -10 \\ 10 & 25 & 25 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ para os ganhos de X sendo que os ganhos de Y são dados por –A.

As estratégias de X e Y serão representadas por x e y, ambos vetores com 3 entradas.

Define-se $E(l, c)$ como a aplicação que em função de duas estratégias l e c nos dá o retorno para L, e que é definida por $E(l, c) = lAc^{T}$ .

Por exemplo, se X optar por **1** em 30% das vezes, **2** em 45% e **3** em 25% (estratégia $x' = [0{,}3 \quad 0{,}45 \quad 0{,}25]$) e se Y optar por **a** em 10% das vezes, **b** em 30% e **c** em 60% (estratégia $y' = [0{,}1 \quad 0{,}3 \quad 0{,}6]$), então $E(x', y') = [0{,}3 \quad 0{,}45 \quad 0{,}25] \begin{bmatrix} 20 & 15 & -10 \\ 10 & 25 & 25 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} = 10{,}975$ . X ganha assim 10,975 dos passageiros e Y perde 10,975.

Antes de passarmos à resolução do problema tentaremos simplificá-lo. Um movimento diz-se dominado se existir outro movimento ou combinação de movimentos que independentemente da escolha do adversário retornam sempre um valor melhor do que o primeiro. No caso da matriz A podemos verificar que a linha 2 domina sobre a linha 3, pelo que pode ser removida da matriz, visto que a sua utilização nunca será a melhor. Após a remoção da linha 3, verificamos que a coluna 3 domina sobre a coluna 2 pois todas as suas entradas são menores que as de 2.

Assim, podemos retirá-la ficando com a matriz $A' = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$.

Para a resolução de problemas de otimização de estratégias em jogos de soma nula é utlilizado o seguinte teorema:

Teorema Fundamental dos Jogos de Soma Nula (Fundamental Theorem of Zero-sum Games)

$E(l^*,c) \geq E(l^*,c^*) \geq E(l,c^*)$ em que $l^*$ e $c^*$ são estratégias ótimas para L e C e l e c são estratégias quaisquer. A prova deste teorema não será explicitada neste trabalho e poderá ser consultada em http://students.cs.byu.edu/~cs670ta/Lectures/proof.pdf.

O valor de retorno caso ambos os jogadores utilizem estratégias ótimas designa-se por $v$ e é sempre o mesmo para quaisquer duas estratégias ótimas. Isto pode provar-se através do teorema anterior. Se $l^*, l^{**}$ e $c^*$ forem estratégias ótimas então $E(l^*,c^*) \geq E(l^{**},c^*)$ porque $l^*$ é estratégia ótima e $E(l^{**},c^*) \geq E(l^*,c^*)$ porque $l^{**}$ é estratégia ótima. Assim, $E(l^{**},c^*) = E(l^*,c^*) = v$.

Um jogo é estritamente determinado se as estratégias ótimas forem ambas estratégias puras.

Para que um jogo seja estritamente determinado, a matriz do jogo tem de ter pelo menos um ponto de sela. Define-se como ponto de sela uma entrada da matriz que seja em simultâneo a menor entrada da linha e a maior entrada da coluna. Se isso acontecer, as estratégias ótimas são as estratégias puras que contém os movimentos correspondentes à linha e coluna do ponto de sela. Por exemplo na matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 3 é ponto de sela e as estratégias seriam $l^* = [0 \quad 1]$ e $c^* = [1 \quad 0]$.

No entanto, na matriz do jogo do exemplo não encontramos nenhum ponto de sela pelo que o jogo não é estritamente determinado.

Para jogos deste tipo a solução é dada pelo seguinte teorema:

Teorema [1]:

Se $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ e o jogo não for estritamente determinado, então:

-> $l^* = \left[ \frac{w-z}{x+w-z-y} \quad \frac{x-y}{x+w-z-y} \right]$

-> $c^* = \left[ \frac{w-y}{x+w-z-y} \quad \frac{x-z}{x+w-z-y} \right]$

-> $E(l^*,c) = E(l^*,c^*) = E(l,c^*)$

Assim, aplicando o teorema ao exemplo, a solução do problema será:

$$x^* = \left[ \frac{25-10}{20+25-10-(-10)} \quad \frac{20-(-10)}{20+25-10-(-10)} \quad 0 \right] = \left[ \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 0 \right]$$

$$y^* = \left[ \frac{25-(-10)}{20+25-10-(-10)} \quad 0 \quad \frac{20-10}{20+25-10-(-10)} \right] = \left[ \frac{7}{9} \quad 0 \quad \frac{2}{9} \right]$$

[1] Consultar Anexos para a prova

$$v = E(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 15 & -10 \\ 10 & 25 & 25 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ 0 \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} \cong 13.33333$$

A companhia X deve optar A companhia X deve optar pelo horário **1** em 2/3 do ano pelo horário **2** em 1/3 do ano enquanto que para a companhia Y deve optar pelo horário **a** em 7/9 do ano e pelo horário **c** nos restantes 2/9. Caso uma das companhias o faça, a companhia X irá obter (50+13,33333) % dos passageiros ($\approx 126667$) e a companhia Y irá obter (50-13,33333) % dos passageiros ($\approx 73333$).

## Bibliografia:


ANTON Howard, RORRES Chris, *Elementary Linear Algebra Applications Version*, 11ª edição, Wiley

http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_jogos (acedido no dia 19 de janeiro de 2014)

http://students.cs.byu.edu/~cs670ta/Lectures/proof.pdf (acedido no dia 19 de janeiro de 2014)

http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/mat.pdf (acedido no dia 19 de janeiro de 2014)

## Anexos:

Prova do segundo teorema utilizado:

Considere-se $l = [l \quad 1-l]$ e $c = [c \quad 1-c]$ duas estratégias quaisquer. O valor do jogo é dado por

$$v = E(l,c) = [l \quad 1-l]\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ 1-c \end{bmatrix} = lxc + ly - lyc + zc - lzc + w - lw - wc + lwc =$$

$$= ((x - y - z + w)l + z - w)c + (y - w)l + w$$

Se L optar por $l^* = \frac{w-z}{x-y-z+w}$ então $E(l^*,c) = \frac{xw-yz}{x+w-z-y}$ que não depende de c, logo $E(l^*,c) = E(l^*,c^*)$. De forma análoga se conclui que se C optar por $c^* = \frac{w-y}{x-y-z+w}$, $E(l^*,c) = \frac{xw-yz}{x+w-z-y}$ que não depende de l, logo $E(l,c^*) = E(l^*,c^*)$. Tratando-se de um jogo não estritamente determinado, $l^* = \frac{w-z}{x-y-z+w}$ e $c^* = \frac{w-y}{x-y-z+w}$ são ambos valores ente 0 e 1.

Como se verifica o Teorema Fundamental $l^*$ e $c^*$, são estratégias ótimas.