Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (11/JANEIRO/2008)
LEAmb, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ Duração: 3H

Nome do Aluno:____ **Número:**___________
Curso:____________________________ **Turma:**_________________
Advertência: há 9 enunciados parecidos...mas distintos
Teste 3 (1h30m de duração): problemas

I 5	I 6	I 7	I 8	II a	II b	II c	II d	IV b

GRUPO I (8 valores)
Perguntas de escolha múltipla

Cotação de cada pergunta de escolha múltipla: **1**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,3**v.

---

1. Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada $[A|b]$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$. Considere as seguintes afirmações:

   I) Se $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ é solução de $Au = b$, então $\alpha = 1$.
   II) O sistema $Au = b$ é possível e indeterminado para um único valor de α.
   III) O sistema $Au = b$ é possível e determinado para um único valor de α.
   IV) O sistema $Au = b$ é impossível para um único valor de α.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, II **B)** III, IV **C)** I, IV **D)** II, III

---

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a^2 & -b \\ b & b \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tais que $\det(A) = 1$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\det(PA) = \det(AP) = 1$.
   II) $\det(2A) = 2$.
   III) $\det\left((I + P)(A^3 + 2A^2 + I)\right) = 0$, onde I designa a matriz identidade 2×2.
   IV) A entrada (1,2) de A^{-1} é b.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, III **B)** I, IV **C)** III, IV **D)** II, IV

---

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sejam $v_1 = (1, 0, 0, 2), v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (2, 0, 1, a)$. Seja ainda $V = L(\{v_1, v_2, v_3\})$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) Os vectores v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes para um único valor de a.
   II) dim(V)=3 para $a \neq 2$.
   III) O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V para $a = 2$.
   IV) dim(V)=3 para qualquer valor de a.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) II, III, IV **B)** I, II, III **C)** I, IV **D)** II, III

4. Seja $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w=0\}$. Considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(V) = 1$.

   II) $\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,-1)\}$ é uma base de V.

   III) $\{(1,1,1,1)\}$ é uma base de $V^{\perp}$, usando o produto interno usual.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, II **B)** II, III **C)** I, III **D)** I, II, III

5. Considere a base canónica $Bc=\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A) $(0,0) \notin \mathrm{Nuc}(T)$.

   B) $T\big((2,3)\big) = (3,-2)$.

   C) O escalar $\lambda = 0$ é valor próprio de T.

   D) Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\measuredangle\Big(u,v\Big) = \measuredangle\Big(T(u), T(v)\Big)$, onde $\measuredangle$ designa o ângulo.

6. Sejam $v_1 = (2,1,0), v_2 = (-1,0,1), p = (1,1,1)$ e $E = L(\{v_1, v_2\})$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1 e v_2. Usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, considere a seguinte lista de afirmações:

   I) $\dim(E^{\perp}) = 1$.

   II) $\{(1,-2,1)\}$ é uma base de $E^{\perp}$.

   III) $\{(-1,0,1), (1,1,1)\}$ é uma base ortogonal de E.

   IV) $\mathrm{dist}(p, E) = \sqrt{3}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I, II, III **B)** II, III, IV **C)** I, III, IV **D)** I, II, III, IV

7. Seja F o espaço linear das funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, infinitamente diferenciáveis e $T : F \to F$ a aplição linear $T(f) = f'$, onde f' designa a derivada de f. Considere a lista de afirmações:

   I) Para cada $a \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = e^{ax}$ é um vector próprio de T.

   II) T é injectiva.

   III) Se f é um polinómio de grau 99, então $T(f)$ também é um polinómio de grau 99.

   IV) O número de valores próprios de T é finito.

   A lista completa de afirmações correctas é

   A) I **B)** II **C)** III **D)** I, IV

8. Considere o sistema de equações diferenciais com valor inicial: $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_2 \\ y_1(0) = 8 \text{ e } y_2(0) = 5. \end{cases}$

   A solução deste sistema é:

   A) $y_1(t) = 3e^t + 5e^{3t},\ y_2(t) = 5e^{3t}$ **B)** $y_1(t) = 8e^t,\ y_2(t) = 5e^{3t}$

   C) $y_1(t) = 3e^{3t} + 5e^t,\ y_2(t) = 5e^t$ **D)** $y_1(t) = 3e^t + 5e^{2t},\ y_2(t) = 5e^{3t}$

GRUPO II (4 valores)

Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas como se segue:

$$T_1\big((x,y,z)\big) = (x+y+z, x+2z), \qquad T_2\big((x,y)\big) = (5y, x-3y, -2y).$$

a) Determine as representações matricias de T_1 e T_2 nas bases canónicas.
b) Determine bases para $\mathrm{Nuc}(T_1)$ e $\mathrm{Im}(T_2)$ e verifique que $\dim\big(\mathrm{Nuc}(T_1) \cap \mathrm{Im}(T_2)\big) = 0$.
c) Resolva a equação linear $T_1\big((x,y,z)\big) = (3,3)$.
d) Determine $T_1 \circ T_2\big((x,y)\big)$.

Resolução:

a) $T_1(1,0,0) = (1,1)$; $T_1(0,1,0) = (1,0)$; $T_1(0,0,1) = (1,2) \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$T_2((1,0)) = (0,1,0)$; $T_2((0,1)) = (5,-3,-2) \Rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,

onde $A_1 = M(T_1, Bc, Bc)$ e $A_2 = M(T_2, Bc, Bc)$.

b) $\mathrm{Im}(T_2) = \mathcal{C}_{A_2} \to \text{base}_{\mathrm{Im}(T_2)} = \{(0,1,0), (5,-3,-2)\}$.

$\mathrm{Nuc}(T_1) = \mathrm{Nuc}(A_1) \to \text{base}_{\mathrm{Nuc}(T_1)} = \{(-2,1,1)\}$.

Obs: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (-2z, z, z) = z(-2,1,1)$

c) $T_1(x,y,z) = (3,3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2z=3 \end{cases}$;

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$; logo $\begin{cases} x = 3-y-z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-2z \\ y = z \end{cases}$; portanto $C.S = \{(3-2z, z, z) \in \mathbb{R}^3\}$ c/ $z \in \mathbb{R}$.

d) Como $M(T_1 \circ T_2, Bc, Bc) = A_1 \cdot A_2 =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, conclui-se que

$T_1 \circ T_2\big((x,y)\big) = (x,y)$, i.e., $T_1 \circ T_2 = I$.

GRUPO III (5 valores)

Para cada parâmetro real α, seja $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha^2-1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$, e $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por:

$$\langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\det(A)$ e verifique que o sistema homogéneo $Au = \mathbf{0}$ é indeterminado se e só se $\alpha = 0$.

b) Determine o polinómio característico e os valores próprios de A, em função de α.

c) Para $\alpha = 3$ encontre bases para os espaços próprios de A e verifique se A é diagonalizável (para $\alpha = 3$).

d) Determine os valores de α para os quais $\langle\cdot,\cdot\rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

e) Usando o(s) produto(s) interno(s) em $\mathbb{R}^3$ da alínea d), calcule $\|(0,1,0)\|$.

Resolução:

a) $\det(A) = \alpha \det\begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha\left((2\alpha)^2 - \alpha^2\right) = \underline{3\alpha^3}$

$Au = 0$ ind. sse A não inv. sse $\det(A) = 0$.

b) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} \alpha-\lambda & 0 & \alpha^2-1 \\ 0 & 2\alpha-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha-\lambda \end{bmatrix} = (\alpha-\lambda)\left((2\alpha-\lambda)^2 - \alpha^2\right).$

$p(\lambda) = 0 \iff \alpha - \lambda = 0$ ou $2\alpha - \lambda = \alpha$ ou $2\alpha - \lambda = -\alpha$

i.e. $\lambda \in \{\alpha, 3\alpha\} = VP_A$.

c) $\alpha = 3$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $VP_A = \{3, 9\}$.

$E(3) = \mathrm{Nuc}(A - 3I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to$ base $= \{(1,0,0)\}$.

$E(9) = \mathrm{Nuc}(A - 9I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to$ base $= \{(4,3,3)\}$.

$(ma(3) = 2$ e $mg(3) = \underline{1}) \Rightarrow A$ não é diagonalizável!

d) Produto interno $\Leftrightarrow \begin{cases} A = A^T \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 0 \\ vp_A > 0 \end{cases}$

• para $\alpha = -1$ os valores pp de $A = \{-1, -3\}$, pelo que não é p.i..

• para $\alpha = 1$ os valores pp de $A = \{+1, +3\}$, pelo que neste caso (o único) define um p.i. (não usual) e $\mathbb{R}^3$!

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\|(0,1,0)\| = \sqrt{\langle (0,1,0), (0,1,0) \rangle}$

$(\alpha = 1)$

$$= \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}.$$

GRUPO IV (3 valores)

Seja $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ um conjunto não vazio de vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, $E = L(S)$ o subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ gerado por S e P_E a projecção ortogonal sobre E. Considere a matriz $A = [v_1\ v_2 \cdots v_k] \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$ cuja coluna j é o vector v_j escrito em coluna, $j = 1, \cdots, k$, e seja $Q = A(A^T A)^{-1} A^T$.

a) Prove que $Q = Q^T$ e $Q^2 = Q$.

b) Prove que $P_E(u) = Q(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Resolução:

a) Sabemos que $(XY)^T = Y^T X^T$ e $(X^{-1})^T = (X^T)^{-1}$, pelo que $Q^T = Q$ e $Q^2 = Q$ resulta destas propriedades + associatividade do produto matricial.

b) Dado $u \in \mathbb{R}^n$ sabemos que $\exists u_1 \in E$, $\exists u_2 \in E^\perp$ tais que $u = u_1 + u_2$.

$(u_1 = P_E(u)$ e $u_2 = P_{E^\perp}(u))$.

Claro que $E = \mathcal{C}_A$.

Sug.: • Se $u \in \mathcal{C}_A$, prove que $Q[u] = [u]$
• Se $u \in \mathcal{C}_A^\perp$, $Q[u] = [0]$.