Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (02/DEZEMBRO/2008)
LEAmb, LEAN, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número de Aluno:________________________ **Curso:**______________

Advertência: há 5 enunciados parecidos ... mas distintos

Cotação das perguntas de escolha múltipla: **0,6**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,2**v.

---

1. Os vectores $v_1 = (1,2,2), v_2 = (1,0,0), v_3 = (1,0,\alpha)$ de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes para:

   ☐ $\alpha = 0$ ☒ $\alpha \neq 0$ ☐ qualquer α ☐ nenhum valor de α

---

2. Os vectores $v_1 = (1,2,2), v_2 = (1,0,0), v_3 = (1,0,\alpha)$ de $\mathbb{R}^3$ geram um plano (subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2) para:

   ☒ $\alpha = 0$ ☐ $\alpha \neq 0$ ☐ qualquer α ☐ nenhum valor de α

---

3. Sejam $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ e $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$ subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$. Considere as seguintes afirmações:

   I) $\dim(V_1)=1$.

   II) $V_1 \cap V_2$ é gerado pelo vector $(1,-1,1)$.

   III) $\dim(V_2)=2$.

   IV) $V_1 = \mathrm{Nuc}(A)$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II, III ☒ II, III, IV ☐ I, III, IV ☐ II, III

---

4. Seja $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vectorial das matrizes reais do tipo 2×2 e V o subespaço vectorial definido como se segue: $V = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+2b=0,\ d=0\}$. Considere as seguintes afirmações:

   I) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in V$.

   II) dim(V)=2.

   III) $\{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\}$ é uma base de V.

   IV) dim(V)=3.

   A lista completa de afirmações correctas é

   ☐ I, II, III ☐ II, III, IV ☐ I, III, IV ☒ II, III

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule o polinómio caraterístico e os valores próprios de A.

b) Determine uma base para cada espaço próprio de A e justifique se A é diagonalizável.

c) Determine uma matriz diagonal D e uma matriz S tais que $D = SAS^{-1}$.

6. Seja $Q \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal (i.e. $Q^{-1} = Q^T$) tal que $\det(Q) = -1$. Prove que então existe um vector u, não nulo, tal que $Qu = u$.

Resolução: a) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$.

$p(\lambda) = 0$ sse $\lambda \in \{-1, 3\}$ = valores próprios de A

b) $E_{-1} = \mathrm{Nuc}(A - (-1)I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathrm{base}_{E_{-1}} = \{(1,-1)\}$

$E_3 = \mathrm{Nuc}(A - 3I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$; $\mathrm{base}_{E_3} = \{(1,1)\}$

A é simétrica $A = A^T$, logo é diagonalizável.

Ou então A é diagonalizáveis pois $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ para $\lambda \in \{-1, 3\}$.

c) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(base) vects próprios

6) $\exists u : u \neq 0$ e $Qu = u$ sse $\lambda = 1$ for valor próprio de Q.

i.e. Vamos provar que $\det(Q - I) = 0$.

Ora $\det(Q - I) = \det(Q(I - Q^T)) = \det(Q) \cdot \det(I - Q^T)$

$= -1 \cdot \det(I - Q^T) = -1 \det(I - Q)$.

$|Q| = -1$

$= -1 \det(-1(Q - I)) = -1 \cdot (-1)^2 \det(Q - I)$

$Q \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}$

$= -\det(Q - I)$.

$\therefore \det(Q - I) = -\det(Q - I) \Rightarrow \det(Q - I) = 0$.