Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (17/OUTUBRO/2008)
LEAmb, LEAN, LEMat, LQ, MEBiol, MEQ

Duração: 45m

Nome do Aluno:____

Número:_______________________Curso:__________________

Advertência: há 6 enunciados parecidos.... mas distintos

Cotação das perguntas de escolha múltipla: **0,6**v. Resposta em branco: **0**v. Resposta errada: **-0,2**v.

---

1. Para cada parâmetro real α sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 3\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações:

I) Se x_1 é solução do sistema $A_\alpha \mathrm{x} = b_\alpha$, então $\alpha \neq 0$.

II) O sistema $A_\alpha \mathrm{x} = b_\alpha$ é indeterminado para algum α.

III) A matriz $(A_\alpha)^2$ é invertível e car(A_α)=3 para todo $\alpha \neq 0$.

IV) A matrix A_α é uma matriz elementar para algum valor de α. [para $\alpha = 1$].

A lista completa de afirmações correctas é

☐ II, III ☐ I, II, IV ☐ III, IV ☒ II, III, IV

---

2. Sejam A, B matrizes reais 2×2, $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Considere as seguintes afirmações:

I) Se x_1 é solução de $A\mathrm{x} = b_1$ e de $B\mathrm{x} = b_1$, então x_1 é solução do sistema homogéneo $(A - B)\mathrm{x} = 0$.

II) Se x_1 é solução de $A\mathrm{x} = b_1$ então x_1 também é solução de $A\mathrm{x} = b_2$.

III) Existe uma matriz A tal que $\mathrm{x} = 0$ é solução de $A\mathrm{x} = b_1$.

A lista completa de afirmações correctas é

☒ I ☐ II ☐ III ☐ I, II, III

---

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $(BA^{-1})^{-1} =$ AB^{-1}

☐ $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ☒ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

---

4. Justifique se a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij} = 3i + 2j$ é simétrica.

A simétrica se $A = A^T$, i.e. $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$.

$a_{ij} = 3i + 2j$

$a_{ji} = 3j + 2i$

$a_{ij} \neq a_{ji}$ sempre que $i \neq j$

$\therefore$ A não é simétrica.

5. Considere as seguintes matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

a) Calcule $\det(AA^T)$ e $\det(A^T A)$ e verifique se AA^T ou $A^T A$ é invertível.

b) Determine o conjunto solução do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$.

c) Determine b tal que $S = \{(1, z, 1) \in \mathbb{R}^3 : \text{com } z \in \mathbb{R}\}$ seja o conjunto solução de $A\mathbf{x} = b$.

6. Se possível dê exemplos de matrizes quadradas A e B com entradas reais tais que $AB = I$ e $BA \neq I$, onde I designa a matriz identidade. Caso não seja possível, justifique porquê.

Resolução: a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$, $A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

$\det(AA^T) = 20 - 4 = 16 \neq 0 \Rightarrow AA^T$ invertível.

$\det(A^TA) = 0 \Rightarrow A^TA$ não invertível.

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ 4z = 0\} = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$.
$y \in \mathbb{R}$

Sistema indeterminado.

c) $A \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = b.$

6 IMPOSSÍVEL.

$AB = I \Rightarrow \det(AB) = \det(I) \Rightarrow \det(A).\det(B) = 1$

$\Downarrow$

A e B invertíveis.

Além disso, $AB = I \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}I \Rightarrow B = A^{-1}$ e $A = B^{-1}$.

Portanto $BA = I$.