Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebras de Operadores
LMAC-pB e MMA

Problemas

— 2° Semestre 2006/2007 —

Paulo Pinto

Lista 2 entregar a resolução até dia 16 de Abril

1. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade e tal que $||e|| \neq 1$. Prove que norma $|||a||| := \sup_{||b||\leq 1}||ab||$ define uma norma equivalente a $||\cdot||$ em $\mathcal{A}$ tal que
$$|||ab||| \leq |||a|||\ |||b|||, \qquad \frac{||a||}{||e||} \leq |||a||| \leq ||a|| \qquad \text{e} \qquad |||e||| = 1.$$

2. Sejam $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ a álgebra das matrizes $n \times n$ e $a \in \mathcal{A}$. verifique se cada uma das seguintes normas $||\cdot||_1$ ou $||\cdot||_2$ fornece a $\mathcal{A}$ uma estrutura de álgebra de Banach, onde
$$||a||_1 = \sqrt{\mathrm{Tr}(aa^*)}, \quad ||a||_2 = \max_i\{|a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{in}|\}.$$

3. Seja $\{\xi_n\}$ uma base ortonormada de um espaço de Hilbert H separável de dimensão infinita, $\{\lambda_n\}$ um sucessão de números reais $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots$ a convergir para 0. Defina-se o seguinte operador linear $a(\xi) = \sum \lambda_n \langle \xi, \xi_n\rangle \xi_n$ com $\xi \in H$.

   a) Prove que $a \in K(H)$, calcule a sua norma $||a||$ e raio espectral r_a.

   b) Verifique que $\langle a(\xi), \eta\rangle = \langle \xi, a(\eta)\rangle$ para todos $\xi, \eta \in H$ e prove que $\{0\} \cup \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(a) \subseteq [0, \lambda_1]$.

   c) Será que $\sigma(a) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?
   Sug. para c): para $0 \neq \lambda \notin \{\lambda_n\}$, verifique se $a - \lambda I$ tem inverso; utilize a *matriz* de a na base o.n..

4. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade e suponha que $\mathcal{B}$ é uma subálgebra *maximal abeliana* de $\mathcal{A}$. Prove que $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ para todo o $a \in \mathcal{B}$.

5. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade e $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $ab = ba$. Prove que:
$$\sigma(ab) \subseteq \sigma(a)\sigma(b) \qquad \text{e} \qquad \sigma(a + b) \subseteq \sigma(a) + \sigma(b).$$
   Sug.: Utilize o problema 3 e/ou a transformada de Gelfand na álgebra $\mathcal{A}_{a,b}$ gerada por $\{a, b\}$.

6. [1] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade tal que existe $c > 0$ satisfazendo
$$c||a||^2 \leq ||a^2||, \qquad \text{para qualquer } a \in \mathcal{A}.$$
   Mostre que então $\mathcal{A}$ é comutativa.

[1] Problema para notas superiores ou iguais a 18 valores