

# Algemene Natuurwetenschappen

## Modelleren en Dynamische systemen

### Inhoudsopgave

<b>1 Les 1: populatiedynamica</b>	<b>1</b>
1.1 Konijnen . . . . .	1
1.2 Haringen . . . . .	4
1.3 Huismussen . . . . .	5
<b>2 Les 2: populatiedynamica en chaos</b>	<b>7</b>
2.1 Gebruik van de grafische rekenmachine . . . . .	7
2.2 Maximale capaciteit . . . . .	8
2.3 Instrumenteel versus reëel . . . . .	9
2.4 Chaos: grenzen aan voorspelbaarheid. . . . .	11
<b>3 Les 3: interactie tussen populaties</b>	<b>14</b>
<b>4 Les 4: Complexiteit en Conway's <i>Game of Life</i></b>	<b>17</b>
4.1 Game of Life . . . . .	18
4.2 Computerpracticum . . . . .	20
<b>5 Les 5: Overzicht en herhaling: modelleren en cellulaire automaten</b>	<b>22</b>
5.1 Modelleren . . . . .	22
5.2 Cellulaire automaten . . . . .	23

## 1 Les 1: populatiedynamica

Dit onderdeel van ANW gaat over dynamische systemen. Wat is een dynamisch systeem vraag je je af. Bijna alles is een dynamisch systeem! Maar dat beantwoordt je vraag natuurlijk niet. Voordat we die vraag beantwoorden, gaan we eerst eens naar een voorbeeld kijken.

### 1.1 Konijnen

We gaan een model bekijken voor het voortplantingsgedrag van konijnen. Konijnen planten zich veelvuldig voort en daarom ontstaan er snel konijnenplagen. Beroemd is het voorbeeld van de konijnenplaag in Australië. Een boer Thomas Austen zette in 1859 voor de jacht 12 konijnen en wat hazen uit op zijn landgoed Barwon Park in Winchelsea, Victoria. Rond 1900 hadden de konijnen zich verspreid over Australië



Figuur 1: Konijnen planten zich snel en veelvuldig voort

en vraten overal aan de gewassen met ernstige gevolgen voor het landschap en de landbouw. Men heeft ze toen proberen tegen te houden door een gigantisch hek van noord naar zuid te bouwen. Nog voor het hek af was zaten de konijnen al aan de andere kant van het hek. Daarna bouwde men nog twee gigantische hekken zodat de totale lengte van alle hekken op 3256 km kwam.



Figuur 2: Rabbit proof fence

Allemaal voor niets, want uiteindelijk verspreiden de konijnen zich over heel Australië. In de jaren '50 bedacht men een nieuwe tactiek. Men besmette konijnen opzettelijk met een voor konijnen zeer dodelijk virus: mixomatose. In korte tijd nam de konijnenpopulatie af van een geschatte 600 miljoen tot 100 miljoen. Daarna

begon de populatie langzaam weer te groeien, omdat immuniteit tegen het virus zich ook begon te verspreiden door natuurlijke selectie: de dieren die resistent waren overleefden.

In ons model hebben we de volgende aannames: er is/zijn

- onbeperkt voedsel,
- geen ziektes,
- geen predatoren,
- voldoende nestgelegenheid.

Dit lijkt op de situatie van de konijnen in Australië. Onder die omstandigheden hangt de groei van het aantal konijnen alleen af van het aantal daarvoor aanwezige konijnen.

Het konijn kan zich het gehele jaar door voortplanten, maar de meeste jongen worden tussen februari en augustus geboren. Tussen september en oktober is het aantal konijnen het hoogst. Per jaar kan een vrouwtje drie tot zeven worpen krijgen, met een minimum interval van dertig dagen. Na een draagtijd van 28 tot 33 dagen worden drie tot twaalf (gemiddeld vijf) jongen geboren. Bij 4 maanden oud zijn konijnen in staat zich voor te planten.

Om tot een eenvoudig model te komen gaan we deze getallen flink aanpassen en moeten we nog meer aannames doen. We nemen we aan dat

- gemiddeld een paartje konijnen elke maand 2 nakomelingen heeft.
- het aantal mannetjes en het aantal vrouwtjes in de populatie gelijk aan elkaar blijft, zodat alle konijnen een paartje kunnen vormen.
- het een maand duurt eer de geboren konijnen zelf nakomelingen kunnen krijgen.
- de konijnen niet dood gaan.

Die laatste aanname is natuurlijk erg discutabel, maar hier komen we later op terug.

Stel je begint met 1 pas geboren paartje konijnen. Na een maand is er niets gebeurd. Na twee maanden krijgen ze 2 nakomelingen en zijn er dus 2 paartjes. Na 3 maanden:  $2+1=3$  paartjes, want alleen het eerste paartje kan nakomelingen krijgen.

**Opgave 1.1.** (a) Maak de volgende tabel af

Maand	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aantal paartjes	1	1	2	3						

- (b) We kunnen een formule maken voor het aantal konijnen in maand  $t$ . We noteren dit aantal met  $K_t$ . Het aantal konijnen  $K_t$  hangt af van het aantal konijnenpaartjes de maand ervoor  $K_{t-1}$  en het aantal konijnenpaartjes 2 maanden ervoor  $K_{t-2}$  (want dit zijn de in maand  $t$  de vruchtbare konijnenpaartjes). Leg uit dat

$$K_t = K_{t-1} + K_{t-2}.$$



Figuur 3: Na een paar jaar worden er veel nieuwe konijntjes geboren.

- (c) Na 30 maanden zijn er 832040 konijnenparen en na 31 maanden 1346269. Hoeveel konijnenpaartjes zijn er na 33 maanden?
- (d) En hoeveel na 28 maanden?
- (e) Na 4 jaar is het aantal konijnenparen bijna 5 miljard (d.w.z. 10 miljard konijnen). Konijnen worden in het wild maximaal 9 jaren. Leg uit dat voor dit model de aanname dat konijnen onsterfelijk zijn niet erger is dan de aanname dat er voldoende hoeveelheid voedsel en nestgelegenheid is.

Een *dynamisch systeem* is een model om verandering van een fenomeen te beschrijven als de tijd verstrijkt: bijvoorbeeld de verandering in een populatie konijnen of van de temperatuur in een kamer. Hierbij is er altijd sprake van een regel die de nieuwe toestand verbindt aan de toestanden van het systeem in het verleden, zoals bijvoorbeeld

$$K_t = K_{t-1} + K_{t-2}.$$

Populatiodynamica bestudeert de verandering van populaties. Normaal zijn populaties stabiel, ze veranderen niet. Wanneer er biologisch evenwicht is in een biotoop, dan zijn de verschillende soorten met elkaar in evenwicht en zijn er hooguit wat schommelingen in populaties. Hierin komt verandering als de biotoop verstoord wordt. Externe factoren, zoals ziektes of immigratie van roofdieren, kunnen de populaties in beweging brengen.

## 1.2 Haringen

Haringen behoorden eeuwenlang tot de belangrijkste vissen in de visserij. Door overbevissing werd het aantal haringen in de Noordzee erg klein, waardoor de regering zich genoodzaakt voelde om een zesjarig vangstverbod (1977-1983) in te stellen. Door strenge Europese vangstbeperkingen, die nu nog steeds gelden, heeft de haring zich kunnen herstellen en gedijt hij tegenwoordig weer relatief goed.

Een haring leeft van plankton, garnalen en kleine visjes. Haringen hebben ook natuurlijke vijanden: grotere vissen en vogels.



Figuur 4: Haringen zwemmen in grote scholen van soms wel een miljoen.

**Opgave 1.2.** We maken een heel eenvoudig model voor het aantal haringen in de Noordzee. We gaan ervan uit dat het aantal haringen  $H_t$  ieder jaar verdubbelt.

- (a) Leg uit dat

$$H_t = 2H_{t-1}$$

Stel dat de hoeveelheid haringen in de Noordzee nu een 0,2 miljard bedraagt. Het minimaal aantal vissen voor een gezonde populatie is 1,3 miljard. Hoeveel jaar moet er een vangstverbod worden ingesteld?

- (b) Stel de haringvangst per jaar wordt beperkt tot een  $\frac{1}{2}$  miljard per jaar. Wat is de nieuwe formule voor de populatie?
- (c) Stel er zijn in 2000 3 miljard haringen. Hoeveel zijn er 5 jaar later?

Stel de omstandigheden in de Noordzee zijn in 2010 veranderd en de populatiedynamica wordt bepaald door

$$H_t = \frac{1}{3}H_{t-1}.$$

- (d) Zijn de omstandigheden verbeterd of verslechterd voor de haring?
- (e) Stel er zijn in 2010 nog maar 1,2 miljard haringen in de Noordzee en het visquotum bedraagt nog steeds  $\frac{1}{2}$  miljard haringen per jaar. Hoeveel haringen zijn er na 5 jaar?
- (f) Wat zou een beter visquotum zijn in 2010?

### 1.3 Huismussen

Het gaat niet goed met dus huismus. Het aantal broedparen is afgenomen van 1-2 miljoen eind jaren zeventig, tot  $\frac{1}{2}$ -1 miljoen nu, en dit aantal neemt nog steeds af. Daar is een aantal oorzaken voor te noemen.



Figuur 5: Er zijn steeds minder huismussen in Nederland.

- minder nestgelegenheid: meer huizen worden gebouwd zonder dakpannen, of de afwerking van de daken is zo goed dat de huismus geen nestjes in kieren en dergelijke kan bouwen.
- minder voedsel: minder insecten door o.a. gebruik van insecticiden. Minder losliggend voedsel, o.a. door het in onbruik raken van het buiten uitkloppen van tafelkleden na het eten.
- meer roofdieren: populariteit van de kat als huisdier, het aantal katten in Nederland is sinds de jaren 90 van de twintigste eeuw sterk toegenomen.

**Opgave 1.3.** Stel dat elk jaar het aantal mussen  $M_t$  5% terugloopt.

(a) Maak de volgende tabel verder af

Jaar	2010	'11	'12	'13	'14	'15	'16	'17	'18	'19
Mussen (in mln)	1	0,95								

(b) Leg uit dat de formule

$$M_t = 0,95M_{t-1}$$

geldt.

- (c) Als een huishouden een vetbolletje en een vogelhuisje ophangen, dan redt zij per jaar een huismusje. Stel 10000 huishoudens hangen een vetbolletje op. Wat wordt dan de nieuwe formule voor het aantal huismussen?
- (d) Wat is het aantal huismussen na 5 jaar?
- (e) Hoeveel huishoudens zouden vanaf 2010 een vetbolletje en een vogelhuisje moeten ophangen om de mussenpopulatie constant te houden?

## 2 Les 2: populatiedynamica en chaos

### 2.1 Gebruik van de grafische rekenmachine

We gaan nu de populatie van de konijnen (dit is de rij van Fibonacci) met de GR berekenen.



Figuur 6: Fibonacci verdiende een standbeeld in Pisa voor zijn bijdragen aan de wiskunde

**Opgave 2.1.** We beginnen met een opgave over de grafische rekenmachine. De tabel die je kreeg bij de vergelijking

$$K_t = K_{t-1} + K_{t-2}$$

kun je ook door de grafische rekenmachine laten maken. Dat scheelt een hoop werk.

- Zet de GR met [MODE] in de stand SEQ (4de regel, helemaal rechts). Dit staat voor Sequences (oftewel rijen). Zet hem voor andere vakken weer terug op functies!
- Ga naar [Y=] en voer in  $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ . Gebruik hiervoor de gele U boven de 7 en niet de groene U boven de 5. Gebruik voor  $n$  de knop [X,T, $\theta$ , $n$ ].

De naam voor de variable is op de GR altijd  $u$ ,  $v$  of  $w$  zijn, dus  $K_t$  kan niet. Bovendien staat de variabele erachter tussen haakjes  $u(n)$  en is altijd  $n$

- Vul op de bovenste regel in  $nMin = 1$  dit is de startmaand, meestal 0 of 1.
- Vul op de derde regel in  $u(nMin) = \{1,1\}$  (dit is de komma links naast de toets [ ( ] ). Dat wil dus zeggen dat  $u(1) = 1$  en  $u(2) = 1$ , oftewel je begint in de startmaand met 1 konijnenpaartje en in maand 2 heb je nog steeds 1 konijnenpaartje.
- Druk nu op [GRAPH] en aanschouw een grafiek van  $K_t$  oftewel  $u(n)$ .
- Druk nu op [TABLE] en aanschouw een tabel met waarden van  $K_t$  oftewel  $u(n)$ . Met de pijltjes kun je naar boven en beneden scrollen.

Bij  $n = 31$  zie je 1.35E6, daarmee bedoelt de GR een 1.35 keer een “1 met 6 nullen”, oftewel  $1.35 \times 1000000 = 1350000$ . Dat laatste past niet meer in de beschikbare ruimte, vandaar. Bij  $n = 32$  en verder kom je deze notatie ook tegen.

De rij van getallen die we nu onderzoeken heet trouwens de rij van Fibonacci. De rij is vernoemd naar de Italiaanse wiskundige Leonardo Fibonacci die leefde van  $\pm 1170$  tot  $\pm 1250$ . Hij beschreef de rij in zijn boek *Liber Abaci* uit 1202, waarin hij ook ons huidige getalsstelsel introduceerde.

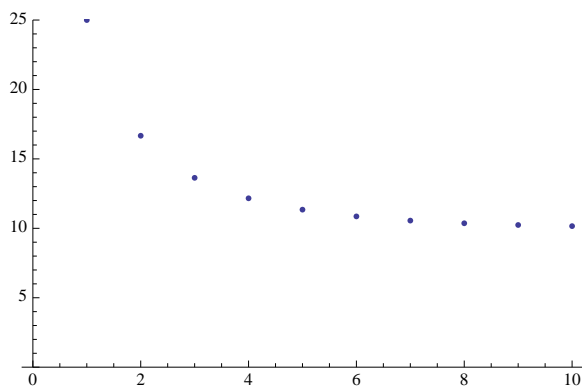
## 2.2 Maximale capaciteit

Van vorige week herinneren we dat één van de tekortkomingen van de modellen voor haringen en konijnen was de aanname dat er onbeperkt voedsel en nestgelegenheid was. Dit is in de praktijk natuurlijk nooit het geval. Je zou kunnen zeg dat het gebied waarin een populatie leeft een maximale *capaciteit* heeft. Er is in principe plaats (d.w.z. voedsel en nestgelegenheid) voor een beperkt aantal individuen, net zoals er in een theater maar een beperkt aantal stoelen is.

We gaan er in het volgende model vanuit dat een bioloog (misschien samen met een wiskundige) de maximale capaciteit heeft uitgerekend van een bepaald gebied. Terug naar de haringen. De formule waar we vanuit gaan voor de toename van het aantal haringen (als er niet gevestigd wordt) is

$$H_t = 1 + \frac{1}{2}H_{t-1}$$

Nu moeten we deze formule (en daarmee het model) gaan aanpassen zodat de capaciteit wordt meegerekend. Stel de capaciteit van de Noordzee is 20 miljard haringen.



Figuur 7: Grafiek van het aantal haringen  $H_t$  als  $H_1 = 25$  en de maximale capaciteit 20

**Opgave 2.2.** Eerst even 2 voorbereidende vragen.

- Leg uit dat  $1 + \frac{H_t}{20}$  ongeveer 1 is als de het aantal haringen klein is.
- Leg uit dat  $1 + \frac{H_t}{20}$  groter dan 2 is als het aantal haringen groter dan de maximale capaciteit is.

De aangepaste formule is

$$H_t = \frac{1\frac{1}{2}H_{t-1}}{1 + \frac{H_{t-1}}{20}}$$

- (c) Leg uit dat in dit model de groei ongeveer gelijk is aan het oude model als het aan haringen klein is.
- (d) Leg uit dat in dit model het aantal haringen juist afneemt als het aantal haringen gelijk is aan de maximale capaciteit van 20 miljard.
- (e) Zet de formule in je GR als  $u(n) = 1.5u(n-1)/(1 + (u(n-1)/20))$ .
- (f) Maak een tabel met  $H_1 = 2$  (oftewel  $u(nMin) = 2$ ). Neem de eerste 7 waarden van de tabel over in je schrift.
- (g) Wat gebeurt er op de lange termijn met het aantal haringen?
- (h) Maak een tabel met  $H_1 = 25$  (oftewel  $u(nMin) = 2$ ). Neem de eerste 7 waarden van de tabel over in je schrift.
- (i) Wat gebeurt er op de lange termijn met het aantal haringen?
- (j) Verander de maximale capaciteit in 30 miljard en onderzoek bij een aantal beginwaarden wat er op lange termijn met het aantal haringen gebeurt. Hoeveel haringen zijn er op lange termijn over?
- (k) Hoe hangt het aantal haringen op de lange termijn af van de maximale capaciteit?

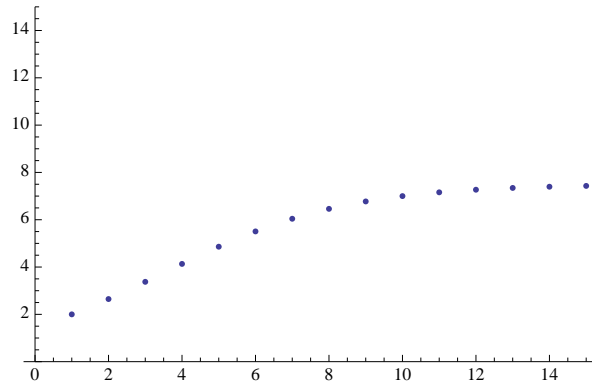
### 2.3 Instrumenteel versus reëel

Bovenstaand model voor vispopulaties werd in 1957 geïntroduceerd door Beverton en Holt. In de praktijk wordt zo'n model gebruikt om *voorspellingen* te doen. Op basis van die voorspellingen kunnen weer beleidsvoorstellen gedaan worden, zoals een visquotum.

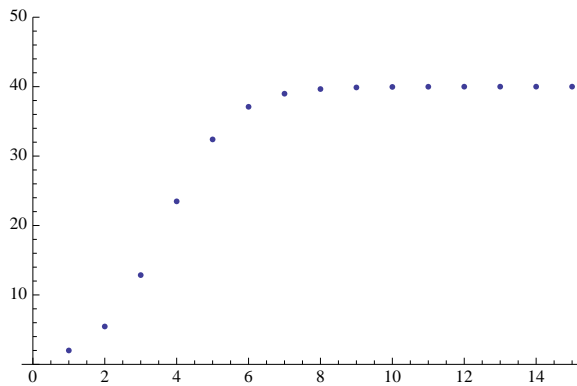
Daartoe moet eerst gezorgd worden dat het model zo goed mogelijk op de *werkelijkheid*. Preciezer: de cijfers van het model moeten zo veel mogelijk lijken op de cijfers uit de *waarnemingen*). Hiervoor worden in eerste instantie de gegevens uit het verleden gebruikt. Met behulp daarvan kun je de *parameters* van het model (zoals in het Beverton-Holt model de maximum capaciteit) zó aanpassen dat de beschrijving die het model voor het verleden geeft zoveel mogelijk overeen komt met de werkelijke getallen uit het verleden. Daarna hoop je dat je model juiste voorspellingen geeft voor de toekomst.

**Opgave 2.3.** Het haringmodel van Beverton en Holt heeft eigenlijk 2 parameters: ten eerste de maximum capaciteit (die eerst 20 is).

- (a) Welke getal past het best voor de parameter maximum capaciteit in de grafiek hieronder?



Figuur 8: Grafiek van het aantal haringen  $H_t$  als  $H_1 = 2$ , maar wat is de maximum capaciteit?



Figuur 9: Grafiek van het aantal haringen  $H_t$  als  $H_1 = 2$  en maximum capaciteit 20

- (b) Maar je kunt ook de  $1\frac{1}{2}$  in de teller veranderen. Als je die bijvoorbeeld in een 2 verandert dan groeien de scholen haringen in het model sneller. Laten we dit getal het groeigetal noemen. Bekijk Figuur 9. Bij deze grafiek is de maximum capaciteit weer 20. Wat is het groeigetal?

Maar... resultaten uit het verleden bieden geen garantie voor de toekomst. Een model is een *instrument*. Over het algemeen wordt een model een een hoger werkelijkheids- of realiteitsgehalte toegekend naarmate:

- de getallen uit het verleden preciezer passen in het model;
- het model minder aannames hoeft te doen;
- de reikwijdte van het model groter is.

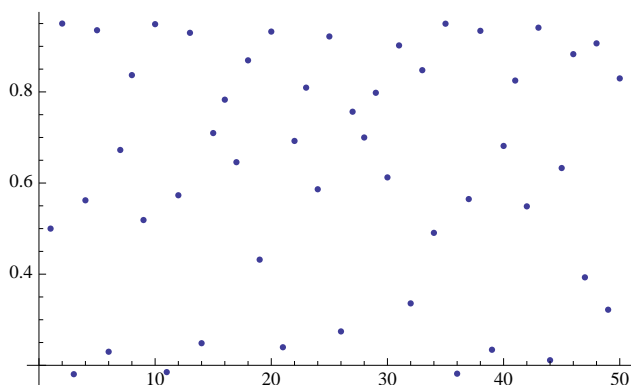
Als een model voor haringen ook voor kabeljauw blijkt te gelden dan neemt het vertrouwen in dat model uiteraard flink toe. De natuurkundige theorie van electronen is zo overtuigend, omdat electronen zich overal precies hetzelfde gedragen. Individuele electronen zijn niet van elkaar te onderscheiden. Dat ligt natuurlijk al anders

voor individuele scholen van haringen en al helemaal voor verschillende groepen van grote roofdieren zoals leeuwen. Die gedragen zich waarschijnlijk allemaal een beetje anders.

Hoe eenvoudiger een situatie is des te minder aannames je hoeft te doen voor een model. En omgekeerd: hoe complexer de situatie die je beschrijft, hoe meer (versimpelende) aannames je moet doen om tot een model te komen. Populatiodynamica is een complex verschijnsel. De modellen zijn meestal verre van exact/precies: je hebt veel aannames nodig en de getallen uit het verleden zijn vaak moeilijk te passen op een formule. In de natuurkunde komen veel vaker modellen voor die bijna precies passen en waarvoor weinig aannames nodig zijn. Daarom zien natuurkundigen hun modellen veel vaker als “waar” of “reëel” (d.w.z. naar de werkelijkheid). Van bijvoorbeeld biologen en economen zul je veel eerder horen dat hun model slechts een benadering van de werkelijkheid is.

## 2.4 Chaos: grenzen aan voorspelbaarheid.

We gaan nu naar een voorbeeld kijken waar we opnieuw de aanname dat er onbeperkt nestgelegenheid en voedsel is vervalt. Stel je vult een bassin met water en zet daar kleine visjes in uit. In het bassin gooi je elke dag een vaste hoeveelheid voedsel. De vissen reproduceren snel en elke dag is het aantal vissen anders. Als het bassin vrij leeg is, dan is er ruimte voor nieuwe dieren. Als het er vol is, dan is er echter niet genoeg voedsel en zitten de visjes elkaar in de weg. Dat heeft ernstige gevolgen en veel visjes sterven en er worden weinig nieuwe geboren. Wanneer je dit experiment echt uitvoert gebeurt er iets eigenaardigs. Elke keer zit er een ander aantal vissen in het bassin. De ene keer is het er vol dan weer leeg. Heel anders dan wat we hierboven bij de haringen zagen. Daar was het aantal haringen na een tijdje stabiel (op een vaste hoeveelheid). In dit experiment verschijnt er echter geen enkel patroon: een chaos!



Figuur 10: Het aantal vissen in de bak blijft maar chaotisch heen en weer springen (verticaal staat welk deel van het bassin gevuld is, horizontaal het aantal dagen)

Je zou wellicht denken dat er dan geen wiskundige modellen voor bestaan, aangezien die altijd orde beschrijven. Maar het tegendeel is waar! Begin jaren '70

vond Edward Lorenz een model dat precies hetzelfde chaotische gedrag vertoonde als het aantal visjes in het basin. We gaan nu zo'n soort wiskundig model voor chaos bekijken.



Figuur 11: Edward Lorenz ontdekte chaotische modellen in de jaren '70

We nemen aan dat er een absoluut maximum is in het aantal visjes in het basin: dan is hij echt vol. We gaan in de gaten houden wat er gebeurt met het getal  $G_t$  dat aangeeft welk deel van die maximum hoeveelheid bereikt wordt. Als  $G_t = 1$  dan zit het basin helemaal vol; als  $G_t = 0.5$  dan zit het basin halfvol; als  $G_t = 0$  dan is het basin leeg, etc. De waarde  $G_t$  zit dus altijd tussen 0 en 1. De formule van ons model is

$$G_t = 3\frac{4}{5} G_{t-1}(1 - G_{t-1})$$

met  $G_1 = 0.5$ , oftewel: we beginnen met een halfvol basin.

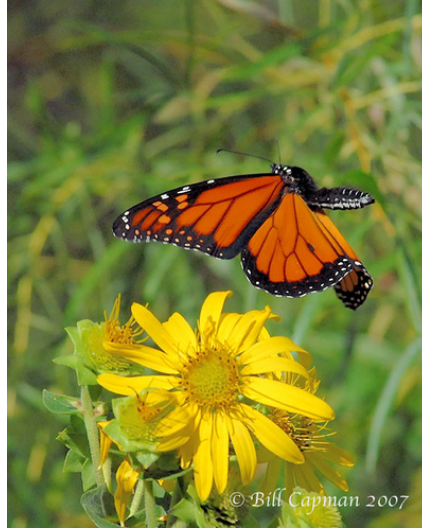
**Opgave 2.4.** (a) Maak een grafiek met behulp van de GR.

Je ziet dat de waarden in dit wiskundig model net zo wild heen en weer springen als in Figuur 10.

- (b) Onderzoek met de GR voor welk deel het basin gevuld is na 30 dagen.
- (c) Stel nu dat de beginhoeveelheid  $G_1 = 0.51$  is; een klein verschil met de 0.5 van eerst. Voor welk deel is het basin nu gevuld na 30 dagen?

Een kleine verandering aan de beginwaarden brengt een heel groot verschil teweeg na 30 dagen. Dit effect wordt het *vlindereffect* genoemd, naar een beroemde stelling uit het werk van Lorenz: als een vlinder met zijn vleugels wappert in Brazilië kan dat een storm veroorzaken in Texas. Lorenz ontdekt dat ook het weer zich chaotisch gedraagt. Een klein verschil in de beginwaarden van een weermodel veroorzaakt al snel een groot verschil in weersvoorspelling op termijn.

- (d) Vergelijk ook  $G_1 = 0.6$  met  $G_1 = 0.61$ . Zie je hetzelfde vlindereffect?



Figuur 12: Het vlindereffect: kleine verschillen in beginwaarden leiden na een tijdje tot grote verschillen in uitkomsten

**Opgave 2.5.** Leg uit waarom vanwege chaos/het vlindereffect er grenzen zijn aan voorspelbaarheid.

### 3 Les 3: interactie tussen populaties

In deze les gaan we bestuderen wat er gebeurt wanneer er verschillende populaties met elkaar in interactie zijn, bijvoorbeeld prooien en roofdieren. Maar we beginnen met twee populaties die op een heel bijzondere manier van elkaar afhankelijk zijn, voortbordurend op de vlinders van het vorige hoofdstuk.

Vlinders leggen eitjes, honderden tot duizenden, afhankelijk van de soort. Uit deze eitjes worden rupsen geboren. Rupsen hebben zeer veel natuurlijke vijanden: vogels, muizen, reptielen en amfibien, andere insecten en zelfs soortgenoten eten elkaar soms op. Slechts een deel vormt uiteindelijk een pop en verwordt tot vlinder.

**Opgave 3.1.** Stel van een soort vlinder legt het wijfje gemiddeld per jaar 500 eitjes, waaruit gemiddeld 300 rupsen komen een jaar later. Stel dat gemiddeld 1% van de rupsen verpoppen. Stel ten slotte dat uit 75% van de poppen een jaar later een vlinder komt. Stel dat alle vlinders van deze soort na een jaar sterven. Stel dat het aantal mannetjes en vrouwtjes vlinders altijd gelijk is.

- (a) Maak formules voor het aantal vlinder  $V_t$  en het aantal rupsen  $R_t$  in het jaar  $t$ .
- (b) Stel  $V_0 = 0.5$  miljoen en  $R_0 = 80$  miljoen. Maak m.b.v. de GR een tabel met het aantal vlinders en rupsen gedurende de eerste 7 jaar.
- (c) Wat gebeurt er met het aantal vlinders? Verklaar dat.
- (d) Stel dat maar 55% van de poppen uitkomt. Wat gebeurt er dan met de vlinder- en rupsenpopulaties? Leg uit!



Figuur 13: Het aantal vlinders hangt van het aantal rupsen eerder af en vice versa

We gaan nu eindelijk proberen ons te verlossen van de aanname dat er geen roofdieren zijn in de populatie. Dat betekent in praktijk dat we een extra populatie in ons model introduceren: de roofdieren. Dit maakt de andere populatie tot prooidieren. Het gaat om de interactie tussen die twee populaties. Net als bij de opgave hierboven zij de twee populaties van elkaar afhankelijk; nu wel op een andere manier.

**Opgave 3.2.** In deze opgave bekijken we een klassiek model met roof- en prooidieren. Het aantal roofdieren in jaar  $t$  is  $R_t$  en het aantal prooidieren is  $P_t$ . Hoe groter het aantal roofdieren en het aantal prooidieren, des te groter het aantal “ontmoetingen” tussen deze twee. We nemen aan dat het aantal ontmoetingen evenredig is met  $P_t \cdot R_t$ .



Figuur 14: Een leeuw jaagt op een impala. Niet elke jacht leidt tot succes voor de leeuw.

Laten we eens aannemen dat het gaat om leeuwen en impala's. Als leeuwen niet jagen, dan gaan ze snel dood. We beginnen dus met een formule:

$$R_t = 0.7R_{t-1}.$$

Als impala's niet worden opgegeten dan groeit de groep gestaag

$$P_t = 1.25P_{t-1}$$

We gaan deze formules nu aanpassen op het feit dat leeuwen op impala's jagen. Niet elke keer dat een leeuw op jacht gaat lukt het om met een impala thuis te komen, maar af en toe wel en dat is goed voor het aantal leeuwen, dus

$$R_t = 0.7R_{t-1} + 0.0004P_{t-1}R_{t-1}.$$

(a) Leg deze aanpassing uit.

Als impala's opgegeten worden door leeuwen, dan verdwijnen ze uiteraard, dus

$$P_t = 1.25P_{t-1} - 0.0015P_{t-1}R_{t-1}.$$

(b) Leg deze aanpassing uit.

(c) Stel  $P_0 = 700$  en  $R_0 = 50$ . Maak een tabel met je GR en beschrijf in woorden wat er met de populaties gebeurd gedurende de eerste 45 jaar.

(d) Na 46 jaar gebeurt er iets raars. Wat moeten we hieruit concluderen?

Het model van de vorige opgave werd ontdekt door Alfred Lotka in 1910 toen hij een scheikundig model maakte. In 1925 kwam op het idee om hetzelfde model voor prooi- en roofdieren te gebruiken. Onafhankelijk van Alfred Lotka kwam Vito Volterra in 1926 tot hetzelfde model, dat daarom het Lotka-Volterra model genoemd is.

Wanneer je de uitkomst van het model bekijkt, hevig schommelende populaties, dan komt dat niet overeen met waarneming in de natuur. Meestal zijn een groep impala's en een groep leeuwen van een stabiele grootte.

- Opgave 3.3.** (a) Noem de verzwegen aanname's in de het Lotka-Volterra model in de vorige opgave.
- (b) Leg uit waarom het aantal leeuwen en impala's normaal gesproken min of meer constant blijft.

## 4 Les 4: Complexiteit en Conway's *Game of Life*

In les 2 zagen we dat naarmate het onderwerp van het onderzoek complexer wordt, het steeds lastiger wordt om modellen te maken. Je moet dan meer aannames gaan doen om de situatie te versimpelen. Vervolgens kloppen de voorspellingen minder precies. We bespraken toen al dat natuurkundigen het minste last hebben van complexiteit. Natuurkunde van, bijvoorbeeld, elementaire deeltjes (electronen e.d.) is moeilijk, maar er is geen sprake van complexiteit. Je kunt het gedrag van elementaire deeltjes heel precies beschrijven, zonder veel aannames. Het wordt al complexer in de scheikunde, als men, bijvoorbeeld, modellen maakt voor reacties waarbij veel moleculen betrokken zijn. Er zijn al veel meer factoren om rekening mee te houden: elk molecuul kan zich op verschillende manieren gedragen. Nog complexer zijn de zaken bij biologie: een volledige beschrijving en voorspelling van het gedrag van een cel is vrijwel onmogelijk, laat staan van het gedrag van een compleet organisme. Een cel en een organisme bestaan uit zo veel afzonderlijke componenten die op elkaar reageren, dat je heel veel variabelen nodig zou hebben om alles te beschrijven. Supercomplex wordt het bij vakgebieden als sociologie en economie, waar het gedrag van groepen organismen (mensen) wordt bestudeerd. Vandaar dat het heel moeilijk is om correcte voorspellingen te doen in de economie: elk jaar zijn er bijvoorbeeld wel weer meevallers of tegenvallers voor het kabinet die het Centraal Planbureau niet zag aankomen met hun macro-economische modellen. Dat is niet de schuld van het CPB, maar wel van de complexiteit van het fenomeen dat zij proberen te beschrijven. In het algemeen spreek je van een complex verschijnsel wanneer het uit veel componenten bestaat die interactie met elkaar hebben. Alhoewel de werking van elk van de componenten wellicht eenvoudig is, ontstaat er complex gedrag door de interactie.



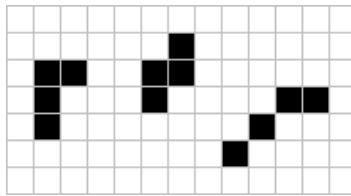
Figuur 15: Het gedrag van een enkele mier is niet zo complex als het gedrag van een mierenhoop

**Opgave 4.1.** Orden de volgende verschijnselen (dynamische systemen) op complexiteit en leg je keuze uit: het vallen van een steen, de hersenen van een mens, de beweging van planeten, gedrag van FC Den Haag-supporters tijdens een voetbalwedstrijd, het stromen van een beekje.

Deze les gaan we een dynamisch systeem bekijken dat uit veel componenten bestaat. We hebben heel veel variabelen. Deze zijn met elkaar in interactie en daardoor ontstaat er complex gedrag, ondanks dat de regels voor de interactie heel eenvoudig zijn.

## 4.1 Game of Life

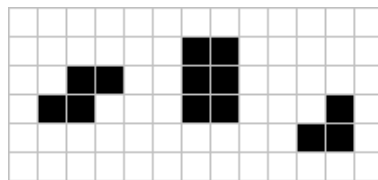
We beginnen met een rooster. Elk vakje in het rooster noemen we een cel. Een cel kan levend (zwart) of een cel kan dood (wit) zijn. Bijvoorbeeld op  $t = 0$  als hieronder.



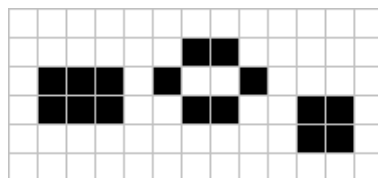
Vervolgens zijn er de volgende regels voor een stap in de tijd (van  $t$  naar  $t + 1$ ):

- een cel met 0 of 1 levende buurcellen gaat dood;
- een cel met 2 of 3 levende buurcellen blijft leven;
- een cel met 4 of meer levende buurcellen gaat dood;
- een dode cel met 3 levende buurcellen komt tot leven.

De buurcellen van een cel zijn de cellen die er direct naast liggen horizontaal, verticaal en diagonaal. De configuratie van hierboven ziet er op  $t = 1$  respectievelijk  $t = 2$  zo uit:



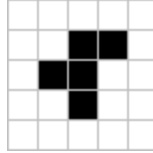
Figuur 16: Op  $t = 1$



Figuur 17: Op  $t = 2$

**Opgave 4.2.** Neem de onderstaande figuur ( $t = 0$ ) over in schrift.

(a) Teken hoe de figuur eruit ziet op  $t = 1$ .



(b) Teken hoe de figuur eruit ziet op  $t = 2$ .

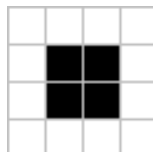
Het bovenstaande dynamische systeem heet *Game of Life* (het is trouwens niet echt een spel (game), omdat er geen spelers zijn). Het is bedacht begin jaren '70 door de wiskundige John Conway, geboren in 1937 en tegenwoordig professor aan Princeton University. Conway was er in geïnteresseerd om te zien hoe, op basis



Figuur 18: John Conway, bedenker van *Game of Life*

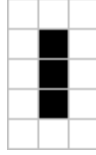
van zo simpel mogelijke regels, complexe verschijnselen zouden optreden die aan het ontstaan van leven doen denken.

**Opgave 4.3.** Teken de volgende figuur op  $t = 1$  en op  $t = 2$ . Wat valt je op?



**Opgave 4.4.** Teken de Figuur 19 op  $t = 1$ ,  $t = 2$  en  $t = 3$ . Wat valt je op?

De laatste opgave laat twee stabiele configuraties zien. Er zijn nog meer stabiele configuraties mogelijk, maar die bestuderen we straks met behulp van de computer.



Figuur 19: Een stabiele figuur die “knippert”

De variabelen in *Game of Life* zien er als volgt uit. Je zou het rooster kunnen nummeren als een assenstelsel zodat elk vakje twee coördinaten heeft:  $(x, y)$ . Bij elk vakje  $(x, y)$  in het rooster (elke cel) hoort een variabele  $L(x, y)$ . Deze  $L(x, y)$  is 0 als de cel dood is of 1 als de cel leeft. Elke  $L(x, y)$  kan veranderen bij een stap in de tijd. Daarom bungelt er weer een  $t$  onder:

$$L(x, y)_t.$$

**Opgave 4.5.** De waarde van  $L(x, y)_{t+1}$  hangt dus af van de waarde van  $L$  in de omliggende cellen, o.a.  $L(x-1, y)_t$ .

- (a) De waarde van  $L(2, 3)_2$  hangt o.a. af van  $L(1, 3)_1$ . Van welke nog meer?
- (b) Schrijf de waarden op waar  $L(x, y)_{t+1}$  vanaf hangt.

Als we een rooster van 30 bij 30 hebben, dan hebben we dus 900 variabelen. Dat is een stuk meer dan de 2 of 3 van vorige les. Je ziet dat elke cel in interactie is met zijn burens. Hierdoor is *Game of Life* een complex discreet dynamisch systeem. Hoe complex het wordt, dat gaan we nu met de computer onderzoeken.

## 4.2 Computerpracticum

Ga naar de site [HTTP://WWW.BITSTORM.ORG/GAMEOFLIFE/](http://www.bitstorm.org/gameoflife/). Als het programma niet wil opstarten installeer dan eventueel JAVA.

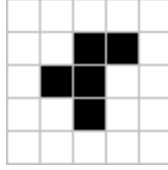
**Opgave 4.6.** Als de applet draait:

- (a) Kies linksonder voor GLIDER.
- (b) Kies rechtsonder voor MEDIUM
- (c) Druk op START. Je kunt eventueel de snelheid naar FAST zetten.
- (d) Noteer in je schrift wat er gebeurt en verklaar de naam *Glider* voor deze “stabiele” configuratie.

Conway zag de Glider als een soort levend wezen in zijn eenvoudige roosterwereld met maar 4 natuurwetten. Elke stabiele configuratie is in die zin een soort levend wezentje. Een andere levensvorm in *Game of Life* is het Lightweight spaceship.

**Opgave 4.7.** Selecteer linksonder LIGHTWEIGHT SPACESHIP en druk op START. Beschrijf wat er gebeurt.

**Opgave 4.8.** Nu wordt het tijd om zelf wat configuraties te proberen.



Figuur 20: *R-pentomino*

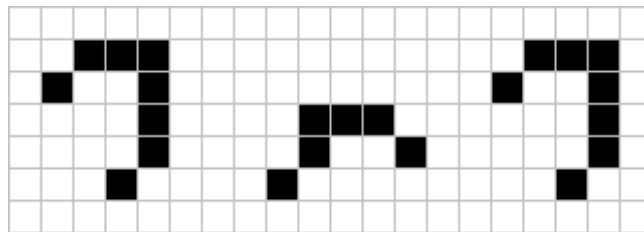
- (a) Kies links onder voor CLEAR.
- (b) Voer bovenstaande figuur uit de eerste opgave in.
- (c) Zet het scherm op SMALL.
- (d) Druk op START. Je ziet een “Big Bang” van “leven” ontstaan.
- (e) Na een tijdje zou je kunnen wisselen naar HYPER.
- (f) Beschrijf alle stabiele “levensvormen” die je langs ziet komen en die er uiteindelijk overblijven.

**Opgave 4.9.** Selecteer links onder GOSPER GLIDER GUN en druk op START. Beschrijf wat er gebeurt. Probeer ook de andere opties.

**Opgave 4.10.** Vul zelf het scherm met een enorme hoeveelheid levende cellen. Kijk wat er gebeurt en noteer de stabiele levensvormen die er langskomen.

**Opgave 4.11.** Vind zo veel mogelijk stabiele configuraties en noteer ze in je schrift.

**Opgave 4.12.** Zoek op het internet naar andere beginpatronen en probeer ze uit. Noteer de uitgeprobeerde patronen in je schrift en beschrijf wat er gebeurt. Probeer bijvoorbeeld eens op [HTTP://WWW.CONWAYLIFE.COM/](http://www.conwaylife.com/).



Figuur 21: de *Puffer train*

Kijk ook thuis eens op je gemak naar het filmpje:  
[HTTP://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=FDMZNGWCHDK](http://www.youtube.com/watch?v=FDMZNGWCHDK).

## 5 Les 5: Overzicht en herhaling: modelleren en cellulaire automaten

### 5.1 Modelleren

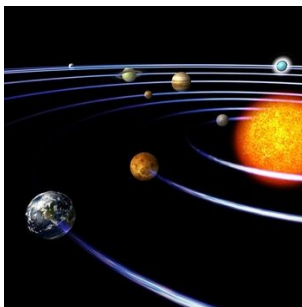
Het wiskundig modelleren van een fenomeen (zoals een bijvoorbeeld een populatie) gaat in een aantal stappen.

- Conceptualiseren: je kiest concepten, doet versimpelende aannames en vormt een conceptueel model.
- Mathematiseren: je kiest variabelen bij de concepten die je wilt onderzoeken. Daarna maak je formules die de variabelen met elkaar in verband brengen; dit is het wiskundig model. In die formules zitten eventueel enkele parameters.
- Berekenen en voorspellen: je rekt aan je model en doet voorspellingen aan de hand van je berekeningen.
- Meten: je doet metingen aan de variabelen en vergelijkt ze met je voorspellingen.
- Aanpassen: als je voorspellingen niet kloppen, dan kun verschillende ingrepen doen, van licht naar zwaar: opnieuw meten (misschien heb je een fout gemaakt), je parameters veranderen, je formules veranderen, andere variabelen kiezen, andere concepten kiezen en andere aannames doen.

Er is een hoop discussie over wat goed modelleren is, maar meestal is men het erover eens dat de hierboven beschreven stappen er onderdeel van zijn; meer hierover bij het ANW-onderdeel wetenschapsfilosofie.

**Opgave 5.1.** Beschrijf elk van deze stappen in de context van Opgave 1.1 over konijnenpopulaties.

**Opgave 5.2.** Stel je wilt de beweging van planeten in een sterrenstelsel beschrijven. Noem zoveel mogelijk relevante concepten. Ken je de notatie voor de bijbehorende variabelen? Ken je een bijbehorende formule?



Figuur 22: De beweging van planeten is ook een dynamisch systeem

**Opgave 5.3.** In augustus 2009 ontsnapte een paartje veldmuizen uit mijn kooitje thuis en vestigde zich op het graanveldje achter mijn huis. Sindsdien heb ik elke maand het aantal paartjes veldmuizen op het veld bijgehouden door ze te markeren. Hier zijn de getallen die ik vond

aug	sep	okt	nov	dec	jan
1	1	6	11	41	96

- Maak een model voor deze situatie: vermeld je aannames, grootheid (variabele), parameters en formule.
- Doe voorspellingen op basis van je model voor het aantal paren veldmuizen in februari en maart.
- In praktijk vond ik in februari een aantal van 105 paartjes veldmuizen en in maart maar 30 paartjes. Noem tenminste 5 mogelijke verklaringen in verband met je aannames.



Figuur 23: Een veldmuisje

## 5.2 Cellulaire automaten

*Game of Life* is een voorbeeld van een *cellulaire automaat*. Het is een 2-dimensionale cellulaire automaat, omdat het rooster met cellen 2-dimensionaal is. We gaan nu kijken naar een 1-dimensionale cellulaire automaat. De cellen liggen dus nu op een rijtje. We schrijven een 1 als de cel leeft en een 0 als de cel dood is. Een voorbeeld is

...0001011000...

We noteren de puntjes links en rechts, omdat links en rechts van dit rijtje allemaal nullen (dode cellen zijn).

Hieronder staan een stel regels beschreven over hoe de rij cellen verandert per tijdstap. Of cel de volgende ronde leeft hangt af van of de cel zelf leeft of niet en of zijn burens leven of niet. Bijvoorbeeld als een levende cel links een dode cel heeft

en rechts een levende cel, dan blijft hij leven, d.w.z. 011 wordt 1. Wat er op de punten komt hangt af van wat er links en rechts van 011 staat. In de tabel hieronder staan de overige regels.

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	1	1	1	0

Volgens deze regels wordt

...0001011000...

op  $t = 0$

...0011010100...

op  $t=1$ . Bijvoorbeeld, de derde 0 is omringd door een 0 en een 1

...0001011000...

en wordt dus een 1

...0011010100...

volgens de tweede regel van rechts. Op  $t = 2$  wordt het

...0110010110...

#### Opgave 5.4.

- Bereken de toestand van de bovenstaande cellulaire automaat op  $t = 3$  en  $t = 4$ .
- Bestaan er configuraties die helemaal dood gaan?
- Bestaan er stabiele configuraties?
- Leg uit dat in onderstaande cellulaire automaat alle configuraties snel dood gaan.

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	1	0	1	0	0	0

- Maak een configuratie die in 3 stappen dood gaat.
- Kun je een configuratie maken die in  $n$  stappen dood gaat voor  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ?

Cellulaire automaten zoals we hierboven beschrijven heten *elementaire cellulaire automaten*.

#### Opgave 5.5. We gaan nu zelf een elementaire cellulaire automaat maken.

- Hoeveel verschillende elementaire cellulaire automaten bestaan er?
- Beschrijf een elementaire cellulaire automaat met veel stabiele configuraties:

111	110	101	100	011	010	001	000

- (c) Schrijf een paar van die stabiele configuraties op.
- (d) Beschrijf ook een elementaire cellulaire automaat waarin een “bewegend wezen” voorkomt, zoals de *gliders* en *spaceships* in *Game of Life*. Schrijf ook op wat het bewegende wezen dan is.

111	110	101	100	011	010	001	000