

Analyse 1
Handout limieten en continuïteit

Rogier Bos

Inhoudsopgave

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Limieten | 2 |
| 1.1 | Intuïtief limieten bepalen | 2 |
| 1.2 | Rekenen aan limieten | 4 |
| 1.3 | Limieten als spel | 6 |
| 1.4 | Absolute waarde en omgevingen | 8 |
| 1.5 | Definitie limiet | 10 |
| 2 | Continuïteit | 13 |
| 3 | Differentieerbaarheid | 16 |

1 Limieten

De notie van limiet is enkele jaren geleden geschrapt uit het programma voor het middelbaar onderwijs. Daarmee wordt een belangrijke bouwsteen voor de analyse verdoezelt. Rigoreuze definities van continuïteit en differentieerbaarheid vereisen de notie van limiet. Tot het begin van de 19de eeuw werden veel van deze begrippen op intuïtieve wijze gehanteerd, zoals we nu op school doen. Door een plaatje te tekenen zie je al gauw dat de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^2$ continu moet zijn, nietwaar? Halverwege de 19de eeuw kwam Karl Weierstrass met de definitie



Figuur 1: Karl Weierstrass leverde belangrijke bijdragen aan de grondslagen van de analyse

van limiet en een daarop gebaseerde notie van continuïteit en differentieerbaarheid die nu nog gebruikt worden en die we zullen bespreken in deze tekst. Gebaseerd op deze definities kon Weierstrass eindelijk bewijzen geven van een aantal fundamentele stellingen uit de Analyse, zoals de Middelwaarde stelling.

1.1 Intuïtief limieten bepalen

Een intuïtief begrip van limieten kun je verkrijgen op numerieke of visuele wijze.

Voorbeeld 1.1. Om een numerieke intuïtie te ontwikkelen bij

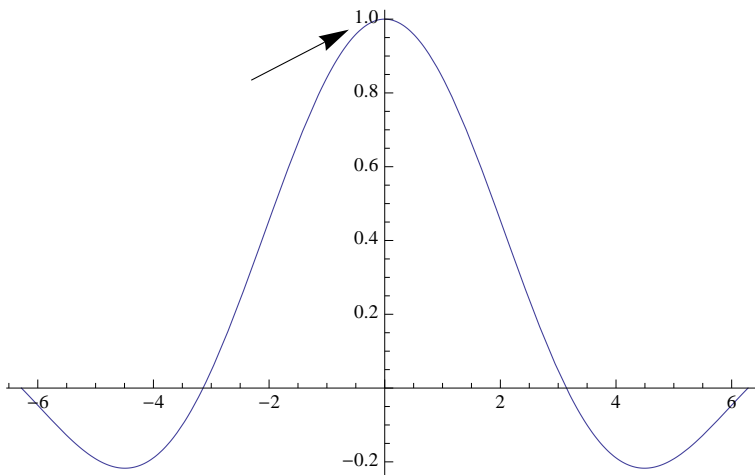
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

vullen we voor x steeds grotere waarden: $x = 1, 10, 100, 1000, 10000$, etc. We krijgen dan steeds kleinere waarden voor $\frac{1}{x}$: $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$, etc.

Voorbeeld 1.2. Wellicht zijn grafieken overtuigender. Bijvoorbeeld

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

is in te zien met behulp van een grafiek van $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (zie Figuur 2). De



Figuur 2: Grafiek van $\frac{\sin x}{x}$ uitgebreid met het punt $(0, 1)$

grafiek bevat niet het punt $(0, 1)$, want $x = 0$ zit niet in het domein, maar je “ziet” dat je de grafiek naadloos kan uitbreiden met het punt $(0, 1)$.

Op deze manier kun je jezelf en je leerlingen wellicht overtuigen van een hele reeks limieten van een basale vorm.

Voorbeeld 1.3. Er geldt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

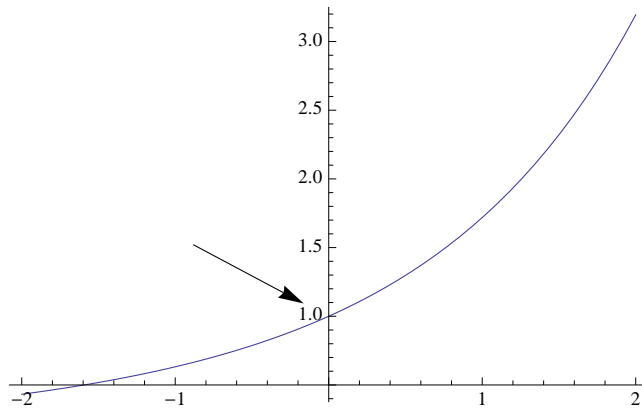
met behulp van een grafiek van $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ (zie Figuur 3). De grafiek bevat niet het punt $(0, 1)$, want $x = 0$ zit niet in het domein, maar je “ziet” dat je wederom de grafiek naadloos kan uitbreiden met het punt $(0, 1)$.

Ook bij het bepalen van een limiet $x \rightarrow \infty$ kan een grafiek inzicht verschaffen. In feite probeer je een horizontale asymptoot te vinden.

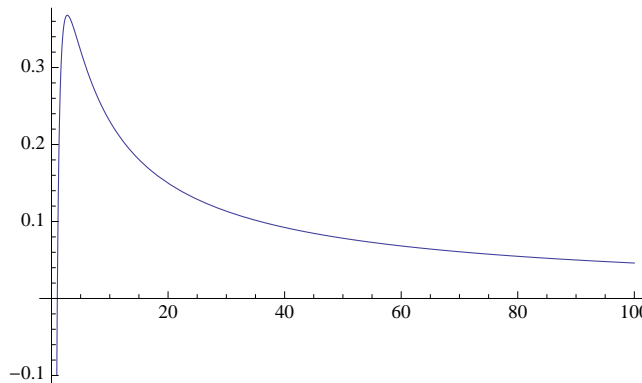
Voorbeeld 1.4. Er geldt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

met behulp van een grafiek van $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ (zie Figuur 4). Je ziet min of meer een horizontale asymptoot $y = 0$ ontstaan. Numerieke benadering met $x = 10, 100, 1000, 10000, 100000$ geeft afgerond 0.23, 0.046, 0.0069, 0.00092, 0.00012. Vindt u dit overtuigend of wordt de roep om een minder intuïtieve aanpak al groter?



Figuur 3: Grafiek van $\frac{e^x-1}{x}$ uitgebreid met het punt $(0,1)$



Figuur 4: Grafiek van $\frac{\ln x}{x}$

Opgave 1.5. Bepaal zelf de standaardlimieten met behulp van een numerieke benadering of grafiek:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$

1.2 Rekenen aan limieten

Je kunt aan limieten rekenen zonder de definities te kennen. Dit is ook precies wat (VWO-)leerlingen voorheen leerden. De standaardlimieten tezamen met een aantal rekenregels geven de mogelijkheid om een heel aantal limieten te berekenen.

Hier volgen de rekenregels. Stel dat $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ voor domeinen $D, D' \subset \mathbb{R}$ en

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y \text{ en } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = z$$

voor zekere $a, y, z \in \mathbb{R}$. Stel voorts dat $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda y \quad (1.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = y + z \quad (1.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = yz \quad (1.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y}{z} \text{ mits } z \neq 0 \quad (1.4)$$

deze regels gelden ook wanneer voor a het symbool ∞ of $-\infty$ wordt genomen. De eerste en vierde regel volgen trouwens uit de derde regel.

Voorbeeld 1.6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 2x + 1)}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((x+1)^2)}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x-1} \frac{\ln(x+1)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \\ &= -2 \cdot 1 = -2 \end{aligned}$$

De volgende twee stellingen komen ook van pas bij het berekenen van limieten.

Stelling 1.7 (Insluitstelling). Stel $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle x op een omgeving $U \subset \mathbb{R}$ van a en

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = y$$

voor een $y \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = y.$$

Deze stelling geldt ook als voor a het symbool $\pm\infty$ wordt gebruikt.

Voorbeeld 1.8. De limiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ berekenen we als volgt:

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

voor $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zie Figuur 5. Bovendien

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pm 1}{x} = \pm \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

dus

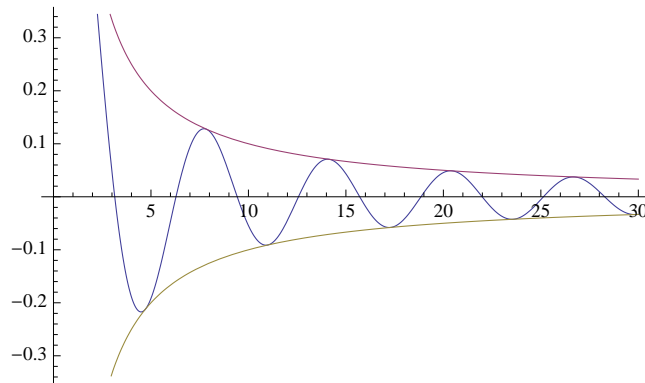
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$$

Stelling 1.9 (Substitutiestelling). Stel dat $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ voor domeinen $D, D' \subset \mathbb{R}$ en

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \text{ en } \lim_{y \rightarrow p} g(y) = q$$

voor zekere $a, p, q \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = q$$



Figuur 5: $\frac{\sin x}{x}$ ingesloten tussen $\frac{1}{x}$ en $-\frac{1}{x}$

Dit geldt ook als voor p, q of a het symbool $\pm\infty$ wordt gebruikt.

Voorbeeld 1.10. De limiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$ berekenen we als volgt.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \ln x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{x^2} = 0,$$

waar we de substitutistelling toepasten met $f(x) = x^2$ en $g(y) = \frac{\ln y}{y}$.

Opgave 1.11. Bereken onderstaande limieten met behulp van bovenstaande stellingen en standaardlimieten.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right)$

1.3 Limieten als spel

Voorbeeld 1.12. Stel u vertelt in de klas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

U geeft wat numerieke ondersteuning van deze uitspraak en tekent een grafiek. Vervolgens hoopt u dat elke leerling dit wel zal accepteren. Maar vandaag niet; een leerling vraagt: “Maar hoe weten we zeker dat $\frac{1}{x}$ niet altijd groter dan een heel klein getal blijft? Hij bereikt de 0 tenslotte nooit.” Wat doet u dan? De meest voor de hand liggende reactie is: “Noem maar eens zo’n getal!” De leerling laat zich niet kennen en zegt: “1 miljoenste.” Uw antwoord is vermoedelijk: “Helaas, voor alle

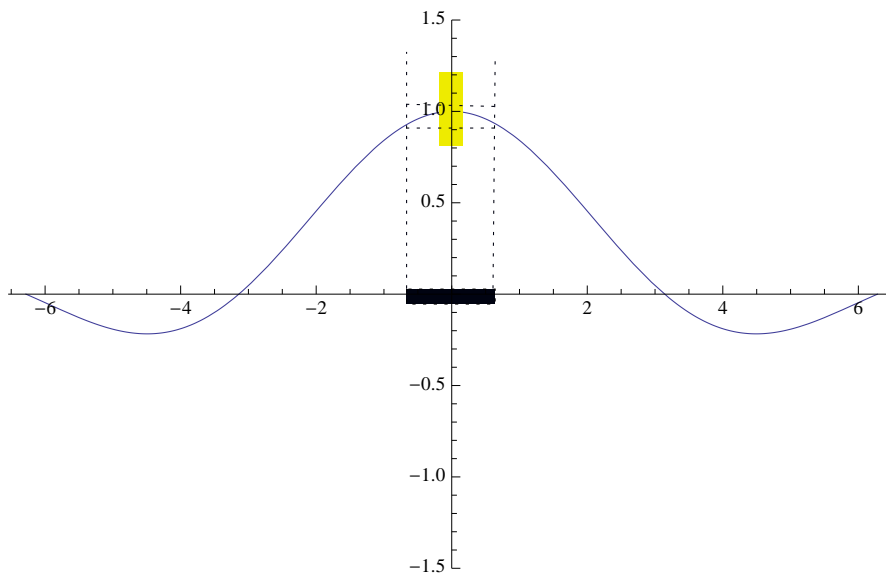
$x > 1000000$ is $\frac{1}{x}$ kleiner dan 1 miljoenste.” Wellicht dat de koppige leerling het nog eens probeert en zegt “1 miljardste”, maar u voelt al aan: dit is een spel dat u altijd kunt winnen, er bestaat een winnende strategie. Als de leerling zegt “ ε ”, dan zegt u “ $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ”.

Dit is wellicht een flauw spel. Toch is een formele definitie van $\lim_{x \rightarrow \infty}$ langs deze lijnen. Bijvoorbeeld: men zegt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ als voor elke $\varepsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $x > N$ impliceert $-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$. Het vinden van die N was de taak van de docent hierboven en deze formele definitie stelt precies dat daar een winnende strategie voor bestaat. Laten we voordat we deze definitie in zijn algemeenheid stellen nog een voorbeeld bekijken.

Voorbeeld 1.13. Beschouw de standaardlimiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

We hebben wederom een kritische leerling op de eerste rij. Die zegt: “Maar hoe weten we zeker dat de grafiek, als hij $(0, 1)$ nadert, niet alsnog alle kant opspringt?”. Het juiste antwoord voor de docent is nu iets technischer; hij zegt: “wijs maar een omgeving aan van $y = 1$ op de y -as waar je denkt dat de grafiek nog uitspringt op het laatste moment.” De leerling wijst de volgende omgeving aan: zie Figuur 6. Als docent kun je eenvoudig een omgeving van $x = 0$ aanwijzen, zó dat $\frac{\sin x}{x}$ op die



Figuur 6: Bij een omgeving van $y = 1$ op de y -as, kun je een omgeving van $x = 0$ op de x -as vinden zó dat $\frac{\sin x}{x}$ op die omgeving van $x = 0$ binnen de omgeving van $y = 1$ blijft.

omgeving binnen de omgeving van $y = 1$ blijft die de leerling aanwees: zie Figuur 6. Een volhardende leerling zou nog een kleinere omgeving van $y = 1$ kunnen noemen, maar de situatie is net als bij bovenstaand voorbeeld: er bestaat een winnende

strategie voor de docent. Bij iedere omgeving van $y = 1$ die de leerling noemt, kan de docent een passende omgeving van $x = 0$ vinden.

Bijvoorbeeld: leerling zou kunnen zeggen: $] \frac{3}{4}, 1 \frac{1}{4} [$ als interval rond $y = 1$. Als docent zou je kunnen zeggen $x \in] - 1, 1 [$, want $\sin(1) \approx 0.84$, dus blijft de $\frac{\sin x}{x}$ blijft tussen 0.84 en 1.

Vervolgens zegt de leerling wellicht: $]0.9, 1.1[$, maar zoals makkelijk te controleren valt blijf je hier ruim binnen met $x \in] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} [$.

Maar wat wordt je strategie voor een willekeurig (symmetrisch) interval $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon [$ rond $y = 1$?

Opgave 1.14. Definieer $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

Je kunt uitrekenen dat

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

- (a) Vind een interval rond $x = 1$ waarvan het beeld onder f binnen $]1 \frac{1}{2}, 2 \frac{1}{2} [$ valt (uiteraard $x = 1$ weggelaten uit het interval) .
- (b) Vind een interval rond $x = 1$ waarvan het beeld onder f binnen $]1.9, 2.1 [$ valt.
- (c) Laat zien dat voor alle ε met $0 < \varepsilon < 1$ het beeld van

$$]1 - \varepsilon, 1 [\cup]1, 1 + \varepsilon [$$

binnen $]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon [$ valt.

Langs deze lijnen zullen we de limiet definieren in zijn algemeenheid. Daartoe zullen we uitgebreid gebruik maken van het verband tussen afstand en absolute waarde. Daarom eerst een opfrisser hierover in de volgende paragraaf.

1.4 Absolute waarde en omgevingen

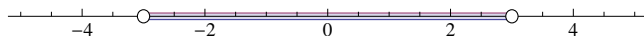
De absolute waarde van een getal is als volgt gedefinieerd:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Dus, bijvoorbeeld, $|2| = 2$ en $|-7| = 7$. Men kan $|x|$ opvatten als de afstand van x tot 0 op de getallenlijn. De formule $|x| < 3$ betekent dan dat de afstand van x tot 0 kleiner is dan 3. De verzameling van al deze getallen vormt samen het open interval $] -3, 3 [$:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\} =] -3, 3 [.$$

De afstand tussen 2 getallen op de getallijn is hetzelfde als de afstand tussen het verschil tussen die twee getallen en 0. Bijvoorbeeld: de afstand tussen 3 en 7 is $|3 - 7| = 4$ of $|7 - 3| = 4$. En de afstand tussen -3 en 8 is $|-3 - 8| = |8 - -3| = 11$. In het algemeen: de afstand tussen $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$ is $|x - y|$ of $|y - x|$.

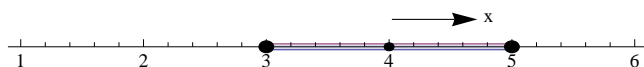


Figuur 7: Het interval gegeven door $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$

Met behulp hiervan kunnen we intervallen noteren die niet rond 0, maar rond een ander getallen liggen. Bijvoorbeeld

$$[3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| \leq 1\}$$

(zie Figuur 8).



Figuur 8: Het interval gegeven door $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| \leq 1\}$

In de volgende paragraaf zullen we deze notatie uitgebreid gebruiken om kleine omgevingen van een punt te noteren. Een “kleine” omgeving van 4 wordt dan genoteerd als

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| < \varepsilon\} =]4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon[$$

waarbij ε een “klein” getal groter dan 0 representeert (het is traditie in de wiskunde om daarvoor de Griekse letter ε te gebruiken).

Het volgende rijtje eigenschappen van de absolute waarde kan van pas komen:

- (a) $|x| \geq 0$ en $|x| = 0$ impliceert $x = 0$.
- (b) $|-x| = |x|$.

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(e) $|xy| = |x| |y|$.

Om (c) te bewijzen merken we op $x \leq |x|$ en $y \leq |y|$, dus $x + y \leq |x| + |y|$. Evenzo, $-x \leq |x|$ en $-y \leq |y|$, dus $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Dus $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Opgave 1.15. Bewijs een van de andere eigenschappen.

1.5 Definitie limiet

Zij $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie met domein $D \subset \mathbb{R}$. Stel $a, y \in \mathbb{R}$.

Definitie 1.16. Men zegt: f heeft de limiet y in a , notatie

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y,$$

als voor iedere $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $x \in D$ en $|x - a| < \delta$ impliceert dat $|f(x) - y| < \varepsilon$.

De definitie van de oneigenlijke limiet lijkt hierop. Hieronder de volledige versie van de definitie die al in Voorbeeld 1.12 de revue passeerde.

Definitie 1.17. Men zegt: f convergeert naar y als $x \rightarrow \infty$, notatie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y,$$

als voor iedere $\varepsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $x \in D$ en $x > N$ impliceert dat $|f(x) - y| < \varepsilon$.

Eerst meer over de oneigenlijke limieten. We kunnen nu eenvoudig de limiet Voorbeeld 1.12 in netjes bewijzen.

Voorbeeld 1.18.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Dan geldt voor alle $x > N$ dat

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \varepsilon.$$

Opgave 1.19. Bewijs vanuit de definitie dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^3| + 5}{2x^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

Opmerking 1.20. Een betoog voor een bewering geldt als een bewijs als het de bewering terugleidt op de onderliggende definities en/of eerder bewezen stellingen of

lemma's. In onderstaande opgaven moet je beweringen over het natuurlijk grondgetal bewijzen. Nu kun je dit op verschillende manieren introduceren. Je kunt e zelf als limiet definiëren:

$$e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Je dient dan nog wel aan te tonen dat deze limiet bestaat (convergeert) voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Een andere manier om e te introduceren is als het unieke grondgetal waarbij de afgeleide van de machtsfunctie gelijk is aan de machtsfunctie zelf: namelijk $x \mapsto e^x$. Gebruikmakend van de definitie van de afgeleide als limiet krijgen we dan dat de vergelijking

$$e^a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$$

het getal e vastlegt. Invullen van $a = 0$ geeft je vervolgens de standaardlimiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

cadeau.

Opgave 1.21. We gaan vanuit de definitie bewijzen dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

- (a) Laat zien dat $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ als $x > 0$.
- (b) Bewijs bovenstaande limiet.

Terug naar de “normale” limieten

Voorbeeld 1.22. We onderzoeken de limiet

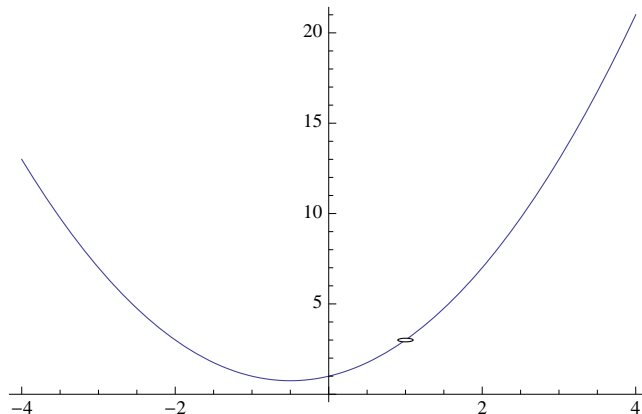
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{1 - x}.$$

De grafiek (zie Figuur 9) ziet eruit als een parabool met een gat bij $(1, 3)$. Bij nader inzien geldt ook

$$\frac{1 - x^3}{1 - x} = \frac{(1 - x)(x^2 + x + 1)}{1 - x} = x^2 + x + 1,$$

als $x \neq 1$. Als we hier toch $x = 1$ invullen vinden we 3. Uit het plaatje is de limiet evident, maar om hem ook algebraïsch te bewijzen moeten we nog even aan de slag. We moeten laten zien dat we $\left| \frac{1-x^3}{1-x} - 3 \right|$ willekeurig klein kunnen krijgen door x dicht genoeg bij 1 te kiezen. We beginnen met wat rekenen met $x \neq 1$

$$\left| \frac{1 - x^3}{1 - x} - 3 \right| = |x^2 + x - 2| = |(x + 2)(x - 1)| = |x + 2| |x - 1|,$$



Figuur 9: De grafiek van $x \mapsto \frac{1-x^3}{1-x}$

volgens Regel (e) uit de vorige sectie. Kiezen we nu $|x - 1| < 1$ (d.w.z. $x \in]0, 2[$), dan weten we in ieder geval dat $|x + 2| < 4$ en dus

$$\left| \frac{1-x^3}{1-x} - 3 \right| < 4|x-1|$$

Zorgen we verder dat $|x - 1| < \varepsilon/4$ dan zijn we dus klaar. Het officiële bewijs luidt dan:

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \min\{1, \varepsilon/4\}$. Dan is $\delta > 0$ en voor $x \in \mathbb{R}$ met $x \neq 1$ en $|x - 1| < \delta$ geldt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-x^3}{1-x} - 3 \right| &= |x^2 + x - 2| \\ &= |(x+2)(x-1)| = |x+2||x-1| \\ &< 4|x-1| < 4\delta < \varepsilon, \end{aligned}$$

aangezien $|x+2| = |x-1+3| < |x-1| + |3| < 4$ volgens de driehoeksongelijkheid (Regel (c) uit de vorige sectie.)

Opgave 1.23. Bewijs uit de definitie dat

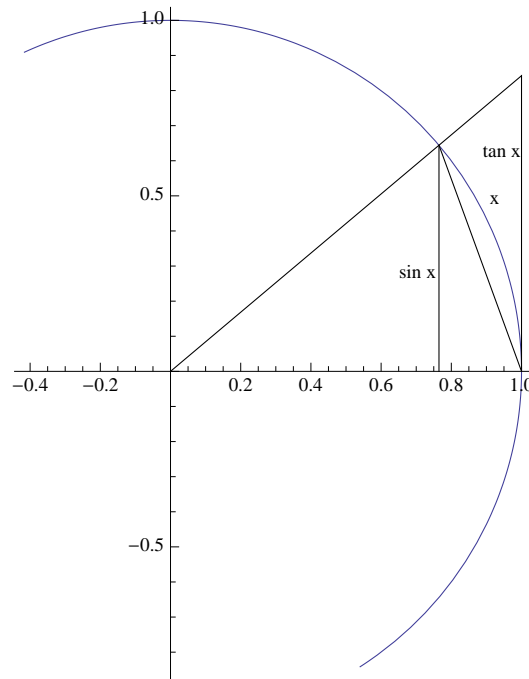
(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3,$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 13x + 14}{x^2 - 4} = -\frac{1}{4}.$

Opgave 1.24. We gaan de standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ bewijzen.

(a) Gebruik Figuur 10 om te bewijzen dat $\sin x < x < \tan x$ als $0 < x < \pi/2$.

(b) Leidt hieruit af dat $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ als $x \neq 0$ en $0 < x < \pi/2$.



Figuur 10: De $\sin x$ en $\tan x$ van een hoek van x radialen

- (c) Bewijs vervolgens de limiet. Je mag gebruiken dat $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ (dit bewijzen we later).

Opgave 1.25. Bewijs de somregel voor limieten.

2 Continuïteit

We leren middelbare schoolleerlingen dat een functie continu is als je de grafiek kunt tekenen zonder je potlood van het papier te halen. Dat is niet geheel onwaar, maar wat moet die arme leerling nu als je de grafiek onmogelijk in eindige tijd kunt tekenen?

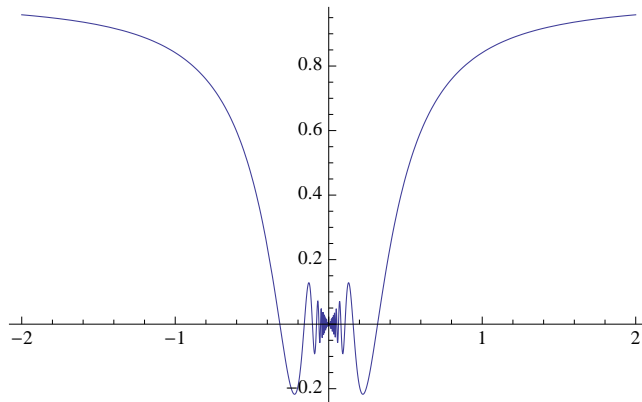
Voorbeeld 2.1. Hoe moet een leerling erachter komen dat

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

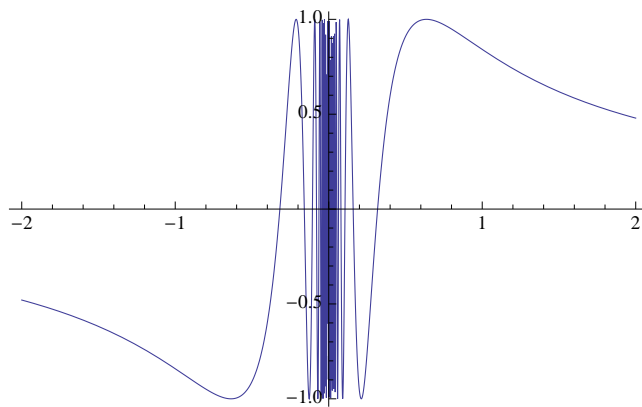
continu is en

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

niet.



Figuur 11: f is continu



Figuur 12: g is discontinu

Definitie 2.2. Zij $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie met domein $D \subset \mathbb{R}$ en $a \in D$. De functie f heet *continu in a* als

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Verder is f continu op $D' \subset D$ als f continu is in alle $x \in D'$. De functie f is continu als f continu is op D .

Voorbeeld 2.3. De functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

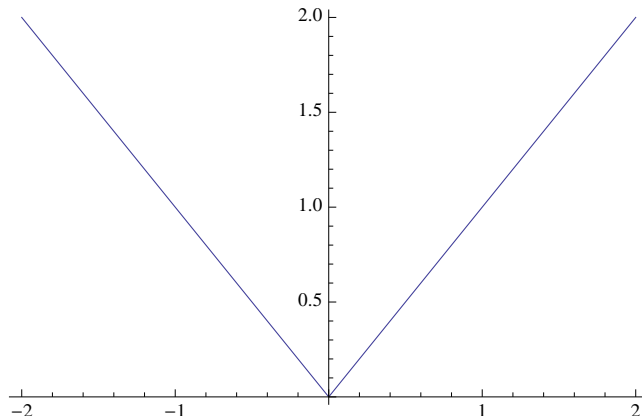
is continu in 0.

Opgave 2.4. Bewijs dat

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

continu is in 0 (je mag de rekenregels voor limieten gebruiken).

Voorbeeld 2.5. De functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = |x|$ is continu. Om



Figuur 13: $x \mapsto |x|$ is continu

dat te bewijzen moeten we laten zien dat g continu is in een willekeurig punt a . We moeten dus bewijzen dat

$$\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|.$$

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \varepsilon$. Stel $|x - a| < \delta$, dan

$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon,$$

volgens Regel (d) voor absolute waarde.

Opgave 2.6. (a) Laat zien dat $x \mapsto x$ continu is op \mathbb{R} .

(b) Laat zien dat $x \mapsto x^2$ continu is op \mathbb{R} .

(c) Laat zien dat alle 2de graads polynomiale functies continu zijn op \mathbb{R} .

(d) Leg uit hoe uit de rekenregels voor limieten rekenregels voor continue functies volgen en formuleer deze regels.

Opgave 2.7. Bewijs dat de functie $k : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $x \mapsto \sqrt{x}$ continu is.

Opgave 2.8. (a) Bewijs dat $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ (oftewel dat de sinus continu is in 0)

(b) Bewijs dat $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ (oftewel dat de cosinus continu is in 0).

Hint: gebruik de rekenregels en dat $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(c) Bewijs dat $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu is op \mathbb{R} (je mag de rekenregels voor limieten gebruiken).

Hint: gebruik dat $\cos(x) = \cos(a + (x - a)) = \cos(a) \cos(x - a) - \sin(a) \sin(x - a)$

Voorbeeld 2.9. De functie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

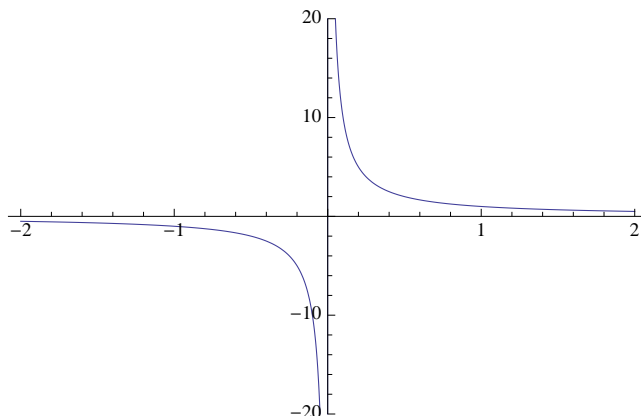
is niet continu in 0.

Bewijs. Stel $\varepsilon = 1$. Als $|x| < 1$, dan

$$\left| \frac{1}{x} \right| > 1.$$

Dus er bestaat geen geschikte $\delta > 0$, want voor elke $\delta > 0$ geldt

$$\{x \mid |x| < 1\} \cap \{x \mid |x| < \delta\} \neq \emptyset.$$



Figuur 14: $x \mapsto \frac{1}{x}$ is discontinu in 0

Opgave 2.10. Laat zien dat $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ discontinu is in 0.

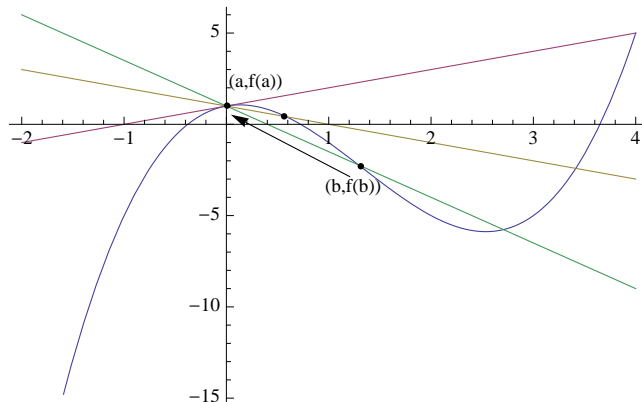
3 Differentieerbaarheid

De raaklijn aan de grafiek van functie f in het punt $(a, f(a))$ is (als hij bestaat) gedefinieerd als de “limiet” van lijnen door de twee $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ als je b naar a laat gaan. Een vergelijking voor de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ wordt (als $a < b$) gegeven door

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De richtingscoëfficiënt wordt ook het *differentiequotient* van f tussen a en b genoemd. Het bestaan van de raaklijn valt samen met het bestaan van de limiet

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Figuur 15: De raaklijn in $(0, 1)$ als “limiet” van lijnen

Als deze limiet bestaat dan heet hij de *afgeleide* of het *differentiaalquotient* van f in a en is f *differentieerbaar* in a . Men schrijft

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heet differentieerbaar, als f differentieerbaar is in alle $a \in D$.

Dit is min of meer hoe middelbare schoolleerlingen tegenwoordig de afgeleide leren. Het probleem is dat de notie van limiet niet wordt uitgelegd. Dit zou ook veel tijd kosten en wellicht te ingewikkeld zijn op dat niveau, zeker als je de ε/δ -definitie van limiet wilt uitleggen. Het kan echter geen kwaad eventueel een numeriek of meetkundig inzicht in limieten aan leerlingen mee te geven.

Voorbeeld 3.1. De functie $f(x) = x^2$ is differentieerbaar op \mathbb{R} met afgeleide $f'(x) = 2x$.

Bewijs. Voor alle $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a.$$

Opgave 3.2. Laat zien dat $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \sqrt{x}$$

differentieerbaar is op $]0, \infty[$ maar niet in 0.

Opgave 3.3. (a) Laat zien dat $(\cos h - 1)(\cos h + 1) = -\sin^2(h)$.

(b) Laat zien dat uit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ volgt dat $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

(c) Laat zien dat de sinus differentieerbaar is op \mathbb{R} .

$$\text{Hint: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$