Module Algemene Natuurwetenschappen: Toeval en Kwantummechanica

Rogier Bos

Inhoudsopgave

Figuur 1: *Toeval? La Nona Ora (Het Negende Uur) van Maurizio Cattelan (1960) is een beeld van paus Johannes Paulus II geraakt door een meteoriet. Op de tentoonstelling stond het beeld onder een glazen dak met een gat waardoor de meteoriet naar binnen was gevallen; vandaar de scherven. Het beeld werd door een liefhebber voor 3 miljoen dollar gekocht.*

1 Inleiding

1.1 Toeval of geen toeval?

Wat is de kans dat een meteoriet precies op je hoofd valt? Maak je je er ook wel eens zorgen over? De kans is heel erg klein, maar niet nul! Misschien moet je af en toe eens omhoog kijken of het niet beter is een pas opzij te doen. Dat gebeurtenissen waarop de kans heel klein is toch kunnen plaatsvinden is een grote inspiratie voor kunstenaars. Het is terug vinden in bijvoorbeeld het kunstwerk *La Nona Ora* van Maurizio Cattelan. Het bestaat uit een beeld van paus Johannes Paulus II geraakt door een meteoriet. Het kunstwerk is cynisch, aangezien in veel religies, waaronder het Rooms Katholicisme, het plaatsvinden van een onwaarschijnlijke gebeurtenis soms aan een ingreep van god wordt toegewezen. In het boek *De ontdekking van de hemel* van Harry Mulisch wordt ook expliciet met dit idee gespeeld.

In het dagelijks leven heb je onophoudelijk te maken met kleine en grote toevalligheden. Daar staat tegenover dat bij andere gebeurtenissen toeval geen rol lijkt te spelen (zie de onderstaande tabel). Misschien ben je het wel niet helemaal eens met

toeval	geen toeval
winnen bij een loterij	dat de zon elke dag opkomt
je eigenschappen bij je geboorte	dat 1+1=2
of het regent	dat een steen naar beneden valt

deze indeling: je kunt het weer toch voorspellen? Hoe weet je zo zeker dat de zon weer opkomt morgen?

Opdracht 1.1. Maak zelf een schema met voorbeelden van toeval en geen toeval.

1.2 Causaliteit

Een zeer handig vermogen van de mens is dat hij verbanden tussen gebeurtenissen kan zien. Als je hard je hoofd tegen een muur aan bonkt, dan doet dat pijn. De mens ziet normaal het verband tussen het "je hoofd bonken tegen de muur" en "pijn aan je hoofd". Het ene is namelijk het gevolg van het ander. Ook veel dieren zijn hier trouwens toe in staat. De mens spreekt van een *causaal* verband tussen de gebeurtenissen. Schematisch zou je het zo kunnen weergeven

$$\boxed{\text{Hoofd tegen muur bonken}} \longrightarrow \boxed{\text{Pijn aan je hoofd}}.$$

Je kunt nog meer voorbeelden geven. Als de het regent, dan worden de straten nat. Als ik een iets loslaat, dan valt het op de grond. Het is vaak niet duidelijk of er een oorzakelijk verband bestaat tussen twee gebeurtenissen. Soms is er uitgebreid wetenschappelijk onderzoek nodig om een causaal verband tussen twee gebeurtenissen aan te tonen; of soms juist om aan te tonen dat er geen causaal verband is: kan te weinig kleren aan in de winter leiden tot griep of niet? Heeft de naam die je ouders je geven invloed op het succes dat je zult hebben in je leven?

Opdracht 1.2. Verzin zelf een voorbeeld van twee gebeurtenis waarvan onduidelijk is of er een causaal verband tussen is of niet.

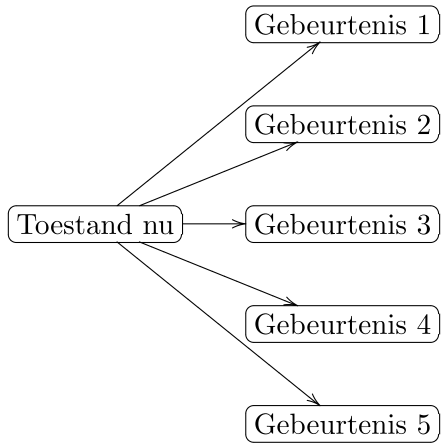
Het (evolutionaire) voordeel van dit vermogen om causale verbanden te zien is dat je toekomstige plannen erop aan kan passen. Je kunt er bijvoorbeeld van afzien je hoofd tegen de muur te bonken om beschading van de muur en/of je hoofd te voorkomen.

1.3 Toevallige gebeurtenissen

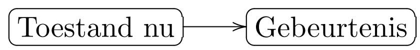
Toeval heeft te maken met hoe gebeurtenissen elkaar opvolgen in de tijd. Zoals we hierboven besproken hebben bestaat er tussen sommige gebeurtenissen een causaal verband. In het geval van een causaal van verband tussen twee gebeurtenissen, dan noemen de eerste de oorzaak en de tweede het gevolg. Als we veel alternatieven gevolgen zien van één gebeurtenis en er gebeurt precies die ene "gunstige", dan zeggen we: "Hee! Dat is toeval!". Miljoenen loten in de loterij en ik win de hoofdprijs: "Hee! Dat is toeval!" 20 minuten in de stad en ik kom jou tegen: "Hee! Dat is toeval!" Meteoriet op mijn hoofd: "Hee! Dat is toeval!"

Bij geen-toeval zijn er juist geen alternatieven. De zon komt iedere ochtend weer op, want de aarde blijft in een vaste baan om de zon. Er is geen ontkomen aan de wetten van Kepler (dat zijn de natuurwetten die daarover gaan). $1 + 1 = 2$, want dat ligt vast in een definitie.

In Figuur 2 en Figuur 3 zie je het verschil tussen toeval en geen toeval schematisch weergegeven. Bij toeval is er dus sprake van verschillende gebeurtenissen die kunnen volgen op de toestand nu. Als er slechts sprake is van één mogelijk vervolg van de toestand nu dan is er geen toeval in het spel.



Figuur 2: We spreken over **toeval** als er verschillende mogelijkheden voor de toekomst zijn.

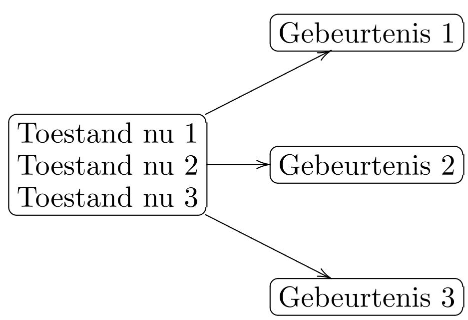


Figuur 3: Als er maar 1 gebeurtenis kan volgen op de toestand nu, dan is er **geen sprake van toeval**.

1.4 Zuiver versus onzuiver toeval

Hiervoor werd over toeval gesproken als je een bekende in de stad tegenkomt. Dat is natuurlijk toeval, maar er is toch iets subtielers aan de hand dan in het bovenstaande schema. Er zijn natuurlijk veel alternatieven: jullie hadden allebei op veel andere plekken kunnen zijn op dat moment. Aan de andere kant, als jullie 's ochtend je planning voor die dag naast elkaar hadden gelegd, dan hadden jullie gezien dat je op hetzelfde moment daar zouden zijn.

Het punt is dat als je de *toestand nu* niet goed in kaart brengt, dan kun je ook toekomstige gebeurtenissen niet precies voorspellen en lijken die toevallig. Als



Figuur 4: Als ik niet weet wat de toestand nu is, dan kan de toekomstige gebeurtenis toevallig lijken.

de beschrijving van mijn toestand nu eigenlijk nog verschillende alternatieven omvat, dan zijn er ook nog verschillende toekomstontwikkelingen mogelijk en lijkt de specifieke gebeurtenis die vervolgens plaatsvindt toevallig. Om dit soort toeval te onderscheiden van het toeval zoals hierboven besproken noemt men het toeval zoals hierboven *zuiver toeval*. Dan kennen we dus precies de toestand nu, maar zijn er toch verschillende vervolg-gebeurtenissen mogelijk.

Nog een voorbeeld: als je een dobbelsteen gooit, dan bepalen de wetten van Newton hoe de dobbelsteen valt. Als ik heel precies controleer hoe ik de dobbelsteen gooi, dan is er geen sprake meer van toeval. Dan heet het valsspelen. Normaal gesproken gooi je echter zonder veel aandacht met de dobbelsteen en acht je elke uitkomst even waarschijnlijk. Dan is er dus wel sprake van een soort toeval, maar geen zuiver toeval. Het toeval zit hem er dan in dat je niet precies weet wat de begintoestand van de dobbelsteen is als hij je hand verlaat.

Het is vaak het geval dat je je toestand niet tot in detail kan vaststellen. Dus zit het dagelijks leven vol van dit soort toeval. Je zult misschien tegenwerpen dat als ik ongeveer de toestand nu weet, dan weet ik ook ongeveer wat er in de toekomst gebeurt. Helaas is dit niet altijd het geval en dat heeft alles te maken met het verschijnsel "chaos". Hierover later misschien meer.

Opdracht 1.3. Geef bij de voorbeelden uit het bovenstaande schema en ook bij je zelf-verzonnen voorbeelden van toeval aan om wat voor soort toeval het gaat, zuiver of niet?

2 Wat is kans?

2.1 Relatieve frequentie

Kans is een getal dat we gebruiken om de mate van toeval van een gebeurtenis weer te geven. Je wordt van jongs af aan geconfronteerd met dit soort kansgetallen tussen 0 en 1 of 0% en 100%. Daardoor kun je vaak een aardige inschatting geven van de kans ergens op. Ook kun je hierdoor conclusies verbinden aan boodschappen als op Teletekst: “kans op regen 30 procent”. Maar kunnen we ook preciezer onder woorden brengen wat we met kans bedoelen?

Figuur 5: Wat wordt er bedoeld met 30% kans op regen op Teletekst?

Er zijn verschillende manieren om de vraag wat is kans te beantwoorden. De eerste manier richt zich op een benadering via relatieve frequenties. Bijvoorbeeld: een munt opgooien kan ik in principe eindeloos herhalen. Als ik zeg “de kans op munt is een half”, dan bedoel ik dat in grofweg de helft van de gevallen munt boven ligt. Dat wil zeggen, de kans op de uitkomst “munt” is de relatieve frequentie waarmee deze uitkomst optreedt, als je het experiment herhaalt.

Het probleem met deze beschrijving van kans zit in het woord “grofweg”. Het kan goed dat na 1000 keer een (zuivere) munt opwerpen slechts 470 keer munt boven ligt. Toch is het wat voorbarig om dan te concluderen dat de kans 47% of $\frac{47}{100}$ is. Vooruit, we gooien nog 1.000.000 keer een munt op! Niet onwaarschijnlijk dat 532.000 keer munt verschijnt. Toch is de kans op munt geen $53,2\%$.

Volgens sommigen betekent dit dat deze benadering van kans via relatieve frequentie onjuist is. Anderen wijzen op de *zwakke wet van de grote aantallen* uit de wiskunde. Die stelt dat hoe vaker je het kansexperiment herhaalt, hoe groter de kans is dat de relatieve frequentie de kans benadert. Deze wet kan worden afgeleid uit een wiskudige definitie van het begrip kans, waarover straks meer. In het geval van een munt opwerpen zegt de wet dus dat hoe vaker je de munt opgooit, hoe groter de kans dat het aantal keer munt gedeeld door het totaal aantal worpen in de buurt van een half komt.

Opdracht 2.1. Leg uit waarom de zwakke wet van de grote aantallen niet zegt dat het *zeker* is dat relatieve frequentie in de buurt van de kans komt. Probeer nog een nadeel van relatieve frequentie als omschrijving van kans te gebruiken.

2.2 Kans volgens Bayes

Een ander probleem met de relatieve frequentie opvatting van kans is dat niet iedere gebeurtenis waar je een kans aan toekent ook herhaald kan worden in een experiment. De uitspraak "de kans op regen op 13 september 2009 is 30 procent" kan niet in een experiment eindeloos getest worden: het is maar 1 keer 13 september 2009.

Een oplossing voor dit probleem komt met de benadering van kans die Bayesiaans genoemd wordt, naar Thomas Bayes (1702-1761). Volgens deze opvatting is de kans op een gebeurtenis een maat voor de kennis dat deze volgt op de toestand nu. Die kennis kan verwijzen naar kennis of geloof van een individu (subjectief Bayesiaans), logisch mogelijke kennis (objectief Bayesiaans) of iets daar tussenin. Dus de bovenstaande uitspraak zegt iets over de aannemelijkheid van regen op 13 september 2009 gebaseerd op kennis. Als de voorspellingen nauwkeuriger waren dan zou het KNMI tenslotte wel 100% of 0% gebruiken. Dit is wat zij met hun (huidige) kennis kunnen voorspellen.

2.3 Kans volgens de wiskundige

Er zijn door wiskundigen verschillende modellen voorgesteld om het begrip kans te beschrijven. We zullen hier de benadering van Andrej Kolmogorov (1903–1987) schetsen.

Figuur 6: Andrej Kolmogorov leverde belangrijke bijdragen aan de grondslagen van de kansrekening.

Om kans te definiëren heb je om te beginnen het begrip *uitkomstruimte* (of *gebeurtenisruimte*) nodig. De uitkomstruimte van een experiment is een overzicht van alle mogelijke uitkomsten. Het makkelijkst is om dit overzicht op de een of andere manier in een schema te vatten. Wiskundigen spreken over een *verzameling* in plaats van een overzicht en zetten er dan accolades omheen. Bijvoorbeeld, bij het opgooien van een munt is de uitkomstruimte Kop of Munt; de wiskundige schrijft: de uitkomstruimte is

$$\{\text{Kop}, \text{Munt}\}.$$

Bij het gooien van een dobbelsteen is de uitkomstruimte

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Bij het gooien van 2 dobbelstenen maken we eerst een schema. De uitkomstruimte

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

bestaat dus uit 36 gebeurtenissen $\{(1,1),(1,2),(1,3),\ (1,4),(1,5),(1,6),(2,1)(2,2),$ $(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),$ $(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2)(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

Opdracht 2.2. Wat is de uitkomstruimte bij het gooien met 3 munten?

Volgens Kolmogorov was een kans (in wiskundige zin) een machientje dat aan elke uitkomst of groepje uitkomsten in de uitkomstruimte een getal tussen nul en 1 toekent. Hij noteerde die kans met $\mathcal{P}$.

Opdracht 2.3. Waar zou die $\mathcal{P}$ voor staan? Hint: denk aan het Engels.

Bijvoorbeeld

$$\mathcal{P}(\text{Munt}) = \frac{1}{2}$$

of

$$\mathcal{P}((2,1)) = \frac{1}{36}$$

of

$$\mathcal{P}((2,1),(3,4),(5,5)) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Hierbij wordt bedoeld

$$\mathcal{P}((2,1),(3,4),(5,5)) := \mathcal{P}((2,1) \text{ of } (3,4) \text{ of } (5,5)).$$

Opdracht 2.4. Wat $\mathcal{P}((1,1),(2,2),\ldots,(6,6))$? Wat is $\mathcal{P}(\text{De som van de ogen is even})$?

Daarbij is de kans dat er *iets* gebeurt natuurlijk 1:

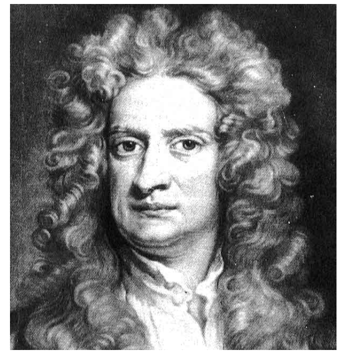
$$\mathcal{P}(\text{Kop of Munt}) = 1$$

en bij het werpen van een dobbelsteen

$$\mathcal{P}(1,2,3,4,5,6) = \mathcal{P}(1 \text{ of } 2 \text{ of } 3 \text{ of } 4 \text{ of } 5 \text{ of } 6) = 1$$

Bovendien mag je de kansen van *losse* gebeurtenissen bij elkaar optellen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}((2,1) \text{ of } (3,4)) &= \mathcal{P}((2,1)) + \mathcal{P}((3,4)) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$



Figuur 7: De wetten van Newton bepalen de banen van planeten én van objecten op aarde.

3 Determinisme

Met de opkomst van de natuurkunde in de zeventiende eeuw (de zogeheten wetenschappelijke revolutie) werd vastgesteld dat veel verschijnselen uitingen waren van een achterliggende natuurwet. Met behulp van die natuurwetten konden dan voorspellingen gedaan worden over de toekomst. Bijvoorbeeld, de banen van planeten voldeden aan de wetten van Kepler en diezelfde wetten konden worden ingezet om het toekomstig verloop van die banen te voorspellen. En die voorspellingen kwamen uit! Isaac Newton (1642-1727) schreef natuurwetten op waarmee hij de banen van objecten (vallende appels, de baan van een kanonskogel) op aarde kon voorspellen. Bovendien konden uit diezelfde wetten de wetten van Kepler worden afgeleid.

Men begon eens goed na te denken over de betekenis van die wetten en het feit dat de voorspellingen goed uitkwamen. Ligt al het gedrag van de natuur dan al vast? Verloopt alles volgens wetten? Heeft de toestand nu altijd maar één mogelijk vervolg bepaald door een natuurwet?

Het idee dat iedere gebeurtenis al bepaald is door het verleden heet *determinisme*. Dat houdt dus in dat heel de toekomst in zekere zin besloten ligt in het moment nu. Deterministen ontkennen dus dat er zuiver toeval bestaat. Pierre-Simon Laplace (1749-1827) was een groot voorstander van het determinisme en stelde
“*Voor een intelligent wezen dat op een bepaald moment zowel alle krachten in de natuur kent als de toestand van alle deeltjes zou niets onzeker zijn, en zouden zowel de toekomst als het verleden bekend zijn.*”
Laplace was tot dit inzicht gekomen door nauwkeurig de wetten van Newton te bestuderen. Hij concludeerde dat deze deterministisch waren in bovenstaande zin. Het intelligente wezen van Laplace zou precies de wetten van Newton toepassen.

Figuur 8: Laplace was voorstander van het determinisme.

Opdracht 3.1. Is determinisme met toeval te verenigen?

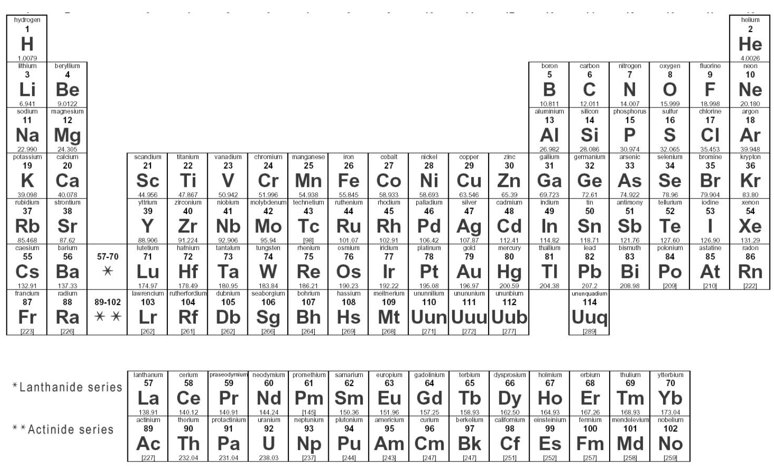
Opdracht 3.2. In welke mate geloof jij dat de natuur deterministisch is?

4 Kwantummechanica

We zullen in deze inleiding in de kwantummechanica bijna geen formules gebruiken. Bijna alleen het qualitatieve aspect komt aan bod, nauwelijks het quantitatieve. Degenen die natuurkunde hebben gekozen zullen later nog meer over kwantummechanica horen en van een aantal verschijnselen de bijbehorende formules leren.

4.1 Atomen en subatomaire deeltjes

Kwantummechanica is een theorie die het gedrag van atomen en subatomaire deeltjes beschrijft. Atomen zijn geordend in het periodiek systeem van elementen. Deze indeling is onstaan door de eigenschappen van atomen heel precies in kaart te brengen. Atomen zijn zeer klein! Helium is bijvoorbeeld ongeveer 1 miljardste millimeter groot en een haar is ongeveer 1 miljoen koolstofatomen breed.



Figuur 9: Het periodiek system van element toont alle soorten atomen.

Nog kleiner zijn subatomaire deeltjes. Dit zijn de deeltjes waar atomen uit zijn opgebouwd. Een atoom bestaat uit een kern van protonen en neutronen met daar omheen een "wolk" van electronen. Maar er bestaan nog veel meer subatomaire deeltjes. De bouwstenen van alle subatomaire deeltjes heten de elementaire deeltjes. Voorbeelden zijn de quarks (up, down, bottom, top, strange, and charm), het electron, het electron neutrino, het muon, het muon neutrino, het tauon, het tauon neutrino en speciale deeltjes voor het overbrengen van krachten (zogeheten bosonen): fotonen, gluonen en W en Z bozon. Al deze deeltjes zijn ingedeeld in een omvattende theorie genaamd het Standaard Model voor de Subatomaire Fysica. Deze theorie is een absoluut hoogtepunt van de 20ste eeuwse natuurkunde. De voorspellingen zijn tot vele decimalen achter de komma bevestigd, o.a. door experimenten met de beroemde deeltjesversneller in het CERN-laboratorium in het zwitserland.

Atomen en subatomaire deeltjes kunnen niet direct worden waargenomen. Je hebt ingewikkelde wetenschappelijke instrumenten nodig om ze indirect zichtbaar te maken. Zo is het mogelijk dat voor zulke kleine objecten andere wetten gelden, dan voor direct waarneembare objecten. Voor die direct waarneembare objecten wordt de beweging beschreven door de wetten van Newton: de klassieke mechanica. Voor de atomaire en subtomaire deeltjes gelden daarentegen de wetten van de kwantummechanica.

Opdracht 4.1. Een haar is ongeveer 50 micrometer breed. Een micrometer is een miljoenste meter. Hoe groot is een koolstof atoom ongeveer?

Opdracht 4.2. Als elk koolstofatoom in een haar een voetbal zou zijn, hoe lang zou die rij van voetballen zijn?

Opdracht 4.3. Een foton is een lichtdeeltje. Waarin zie je terug dat licht zich als een stroom van deeltjes gedraagt? Welke kracht denk je dat het foton overbrengt?

4.2 Superpositie

We stoten meteen door tot in het hart van de kwantummechanica en daar treffen we het superpositie principe aan. In de kwantummechanica kan een object (een deeltje) zich bevinden in een som van twee of meer toestanden. In de klassieke mechanica spint een bal links *of* recht om zijn as, maar in de quantum mechanica kan een deeltje zich een beetje linksom plus een beetje rechtsom om zijn as draaien; in een superpositie van linsom en rechtsom. Wat? Ja echt! Het is niet anders... Wat heeft dat te betekenen? Daar maken filosofen (en natuurkundigen zelf) zich nu al zo'n 80 jaar zorgen om.

Maar het wordt nog erger, want dit is niet alleen voor het draaien om de as zo, het geldt ook voor de positie van een deeltje. Een deeltje kan zich een beetje op één plaats plus een beetje op een andere plek bevinden. Een bewijs daarvan levert het twee-spleten-experiment, waarover later meer. Sterker nog een deeltje kan zich op deze manier over de hele ruimte uitsmeren. En dit geldt niet alleen voor de locatie van het deeltje, maar ook zijn snelheid. Ook de snelheid kan feitelijk een som van verschillende snelheden zijn.

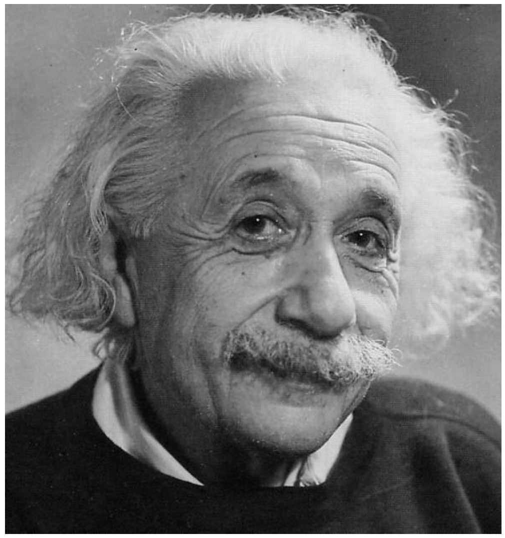
Nog een voorbeeld: een atoom kan instabiel zijn en uiteen vallen. Dit is een kwantummechanisch proces. Als gevolg daarvan kan een atoom op een gegeven moment zich in een superpositie bevinden van 'uiteengevallen zijn' en 'niet uiteengevallen' zijn. Ziehier het Grote Mysterie van de kwantummechanica!

Een paar uitspraken van beroemde natuurkundigen over kwantummechanica:

> "*For those who are not shocked when they first come across quantum theory cannot possibly have understood it.*" (Niels Bohr)
>
> "*I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.*" (Richard Feynman)
>
> "*Marvelous, what ideas the young people have these days. But I don't believe a word of it.*" (Albert Einstein)

Einstein was in feite helemaal niet zo oud toen de kwantummechanica het licht zag in de jaren '20 van de vorige eeuw en een van zijn eigen ontdekkingen heeft zelfs een belangrijke aanzet ertoe geleverd. Toch heeft hij zijn hele leven problemen met de kwantummechanica gehad, maar daarover later meer.

Opdracht 4.4. Leg uit waarom het zo shockerend is dat deeltjes in een superpositie van toestanden kunnen verkeren.



Figuur 10: Volgens Albert Einstein was er iets niet in de haak met kwantummechanica.

4.3 Waarnemingen en kans

Even terug naar het deeltje dat een beetje linksom plus een beetje rechtsom om zijn as draait. Een concreet getallen-voorbeeld zou kunnen zijn dat de toestand

$$\frac{1}{2}\,\langle\text{linksom}\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\langle\text{rechtsom}\rangle$$

is. Stel we gaan een meting doen aan het deeltje om vast te stellen of het linksom of rechtsom draait. Zet je schrap, want nu komt de eigenlijke Grote Schok! **Op het moment dat we de meting doen springt het deeltje uit zijn oude toestand naar een toestand van linksom draaien of naar een toestand van rechtsom draaien**. Onze meting heeft invloed op het deeltje!

Wat is nu de betekenis van die getallen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ die voor linksom respectievelijk rechtsom staan? Het kwadraat van die getallen is de kans dat het deeltje naar de toestand springt die erachter staat. Dus de kans dat het deeltje op het moment van de meting ineens alleen nog maar linksom draait is $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Opdracht 4.5. Leg uit dat de kans dat het deeltje op het moment van de meting ineens alleen nog maar rechtsom draait $\frac{3}{4}$ is.

Opdracht 4.6. Stel de toestand (qua draaien om de as) van het deeltje is onbekend en ik schrijf

$$x\,\langle\text{linksom}\rangle + y\,\langle\text{rechtsom}\rangle$$

met x en y variabelen. Leg uit dat het punt (x, y) op een cirkel met straal 1 ligt.

Opdracht 4.7. Waarom is het zo'n Grote Schok dat onze meting het deeltje beïnvloedt?

Hetzelfde fenomeen vindt plaats als je de locatie van een atoom of elementair deeltje gaat meten. Stel dat het zich voor de meting in een superpositie van locaties bevindt. Het deeltje is uitgesmeerd over de ruimte. Op het moment dat we de meting doen, door bijvoorbeeld het deeltje op een scherm te laten botsen waar het een lichtpuntje achterlaat, springt het deeltje van zijn uitgesmeerde toestand ineens naar toestand gelocaliseerd op de plek van het lichtpuntje. Op eenzelfde soort manier als hierboven (die wiskundig gezien nu te ver gaat) kun je de kans berekenen dat je het uitgesmeerde deeltje terugvindt op een plek.

Opdracht 4.8. Leg uit dat er in de kwantummechanica sprake is van zuiver toeval.

Einstein was niet blij met deze fundamentele rol voor toeval in de kwantummechanica. Dit had ook te maken met zijn geloof in God als schepper en als beschikker over het lot. Hij baseerde zich daarbij onder andere op het werk van de beroemde filosoof Spinoza. Einstein's overtuiging was dat de natuur zich volgens deterministische wetten gedraagt. Zuiver toeval past daar niet in en dus schreef hij de volgende beroemde woorden in een brief aan Max Born:

"*Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum naher. Jedenfalls bin ich überzeugt, dass der nicht würfelt.*"

In vertaling:

"*De theorie levert veel op, maar brengt ons nauwelijks dichter bij het geheim van God. In ieder geval ben ik er van overtuigd dat hij niet dobbelt.*"

Opdracht 4.9. Wat bedoelt Einstein als hij zegt dat God niet dobbelt?

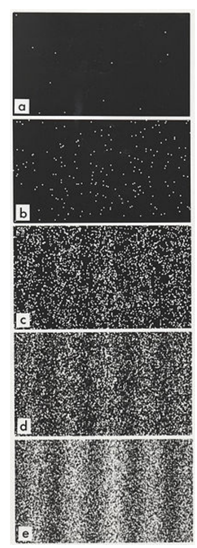
Figuur 11: Dobbelt god?

4.4 Het twee spleten-experiment

Een van de meest illustratieve (en illustere) experimentele bevestigingen van de kwantummechanica is het twee spleten-experiment. Bij dit experiment worden electronen op een plaat met twee spleten afgeschoten. Achter de plaat bevindt zich een scherm waar een puntje oplicht als er een electron op botst. Als een electron zich zou gedragen als een balletje, dan zouden er op het scherm dus twee strepen te zien zijn recht achter de strepen. Maar in praktijk gebeurt er iets heel anders. De puntjes lijken eerst op willekeurige plekken acht de spleten op te lichten, maar vele electronen later ontstaat er een zogeheten interferentiepatroon. Dit soort patronen ontstaan normaal alleen als er een golf door de twee spleten wordt laten. De conclusie is dus dat het electron zich als een golf gedraagt als het door de spleten passeert.

In die vorige zin wringt het al: ... het electron.. door de splet*en* passeert. Hoe kan het nou dat 1 electron door 2 spleten gaat? En daarna verschijnt het toch weer als een puntje op het scherm. De verklaring ligt dus in de notie van superpositie. Op het moment dat het electron door de spleten gaat, bevindt het zich op een superpositie van plaatsen. Op het moment dat het electron op het scherm botst vindt er een meting plaats en wordt het dus gedwongen te verschijnen op een klassiek acceptabele manier. Met een kans bepaald door de specefieke waarden in de superpositie verschijnt het deeltje als een oplichtend puntje op het scherm.

Als er vervolgens een meetapparaat wordt geplaatst bij de spleten, ontstaat er geen interferentiepatroon meer. In plaats daarvan zien we gewoon twee strepen recht achter de spleten! Dit komt omdat het meetapparaat het electron in een klassiek acceptabele positie dwingt voor het de spleten bereikt. Het electron bevindt zich niet meer in een superpositie bij de spleten en gaat dus door de ene of door de andere spleet. Als gevolg daarvan vindt er geen interferentie meer plaats en er verschijnt geen interferentiepatroon meer op het scherm. De meting door het meetapparaat heeft dus invloed gehad op electron! Dit is geheel in contrast met de klassieke mechanica: als ik de locatie van een planeet bepaal of van een biljartbal, dan heeft dat geen enkele invloed op die planeet of op die biljartbal.

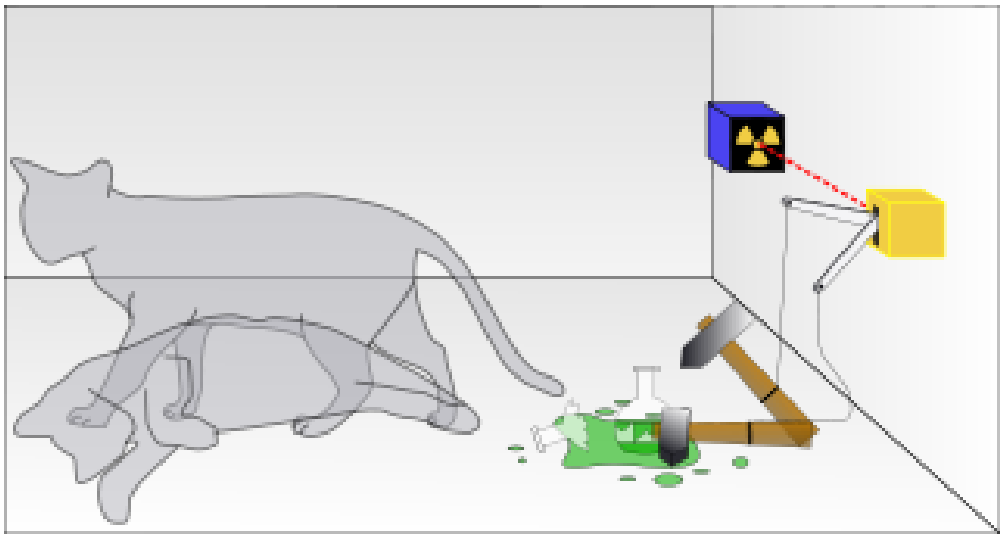


Figuur 12: Het onstaan van het interferentiepatroon bij het 2 spleten-experiment.

4.5 Schrödinger's kat

So far, so good, deeltjes in superposities: een beetje vreemd, maar wat je niet ziet, deert niet. Op het moment dat je een meting doet spring het deeltje tenslotte weer in een acceptabele toestand: linksom of rechtsom, uiteengevallen of niet. Dus je neemt nooit direct een deeltje in superpositie waar. Maar wat nu als je het niet-direct zichtbare deeltje koppelt aan iets dat wel direct zichtbaar is, zoals een kat?

Het volgende is een gedachte-experiment van Schrödinger, gebaseerd op een idee van Einstein. Het is een gedachte-experiment dus niet een experiment dat je ook echt uit gaat voeren (don't try this at home!) Je stelt je voor wat er zou gebeuren als je het uit zou voeren. Einstein was dol op gedachte-experimenten; zijn speciale relativiteitstheorie ontdekte hij bijvoorbeeld mede door het gedachte-experiment dat hij op een lichtstraal zou meereizen.



Figuur 13: Schrödinger's kat: $\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\text{dood}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\text{levend}\rangle$?

Benodigdheden: een hermetisch afsluitbare kist, een instabiel atoom, een flesje cyanide dat open gaat als het atoom uiteenvalt en een kat. Je voelt al aan waarom dit een gedachte-experiment is: je stopt de kat met atoom en cyanide in de kist en sluit de kist; als het atoom uiteenvalt, dan komt de cyanide vrij en sterft het arme diertje. Alhoewel... het uiteenvallen van het atoom wordt door de kwantummechanica beschreven. Op een gegeven moment bevindt het atoom zich in een superpositie van uiteengevallen en niet-uiteengevallen. Bevindt de kat zich dus ook in een superpositie van dood en levend? "Belachelijk!" vond Schrödinger en daarmee de hele interpretatie van kwantummechanica in termen van superposities en kansen zoals voorgesteld door Bohr c.s. in Kopenhagen.

Opdracht 4.10. Wat vind/denk jij: kan een kat zich in een superpositie bevinden, bijvoorbeeld een superpositie van dood en levend?

Volgens de kwantummechanica vindt er pas een meting plaats op het moment dat we de kist openen. Dan pas wordt er door toeval bepaald of de kat dood is of niet. Of geldt de "meting" door de kat ook al als meting?

Het debat over Schrödingers kat is nog niet beslecht. Volgens Lee Smolin, Roger Penrose en een aantal andere belangrijke hedendaagse wetenschappers is het zelfs één van de belangrijkste problemen van de natuurkunde op dit moment. Het oplossen ervan zou een belangrijke doorbraak zijn. Zijn er misschien toch manieren waarop een deeltje van superpositie in een klassiek acceptabele toestand springt, zonder dat er een meting plaatsvindt? Want hoe zit dat met afgelegen planeten waarop nooit een waarneming plaatsvindt? Zijn daar alle deeltjes in superposities?

Figuur 14: Wie lost het probleem met Schrödinger's kat op?

4.6 Kwantumtunnels

Het bestaan van superposities in de kwantummechanica heeft drastische gevolgen. Eén van deze gevolgen is dat de positie van een deeltje in superpositie niet zeker is. Het kan bij een meting op allerlei plekken opduiken afhankelijk van hoe de kansen zich verdelen.

Dit gaat zelfs zo ver dat een muur voor een deeltje geen echte muur meer is. Stel een deeltje komt heel dicht bij een muur. De kans dat het deeltje voorbij de muur tevoorschijn komt, bij een meting, neemt heel snel af. Toch is de kans niet helemaal nul. Het deeltje bevindt zich dus in een superpositie van links + een heel klein beetje rechts van de muur. Dus als ik ga meten, en daarmee het deelt dwing in een acceptabele toestand, dan is er *een kleine kansje* dat het aan de andere kant van de muur opduikt. Dit effect heet de kwantumtunnel (in het engels *quantum tunneling*). Het is ook echt zo waargenomen in experimenten, waarbij er duizenden deeltjes op een muur werden geschoten en er toch af een toe eentje aan de andere kant gemeten werd.

Opdracht 4.11. Waarom is het heel onwaarschijnlijk dat een hele tennisbal door een muur zou gaan via een kwantumtunnel, denk je?

Je krijgt misschien de indruk dat kwantumtunnels heel obscure dingen zijn, maar het tegendeel is waar. Een belangrijke toepassing van het fenomeen is in flash geheugen (van je mp3-speler). Bij het laden van gegevens op de kaart vinden miljaren kleine kwantumtunnels plaats!

Opdracht 4.12. Waarom is het zinloos (en dus zonde) om nu je mp3-speler open te slopen en op zoek te gaan naar de kwantumtunnels?

Figuur 15: Door de muur? Electronen wel! mensen? Heel onwaarschijnlijk... Het bronzen beeld *le passe-muraille* van Jean Marais is te zien in Montmarte in Parijs. Het is gebaseerd op een kort verhaal van Marcel Aym (1902 - 1967), dat zich in Montmartre afspeelt.