1^o **Teste**

Cálculo Diferencial e Integral I

Tagus 2^afase, 2^o Semestre de 2006/2007

Versão A

Duração: 1 hora e 30 minutos

Data: 15/ 12/ 2007

1- [3 val.] Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log\left(\frac{3}{x^2 - x + 1}\right) \geq 0\}, \qquad B = [\sqrt{2}, +\infty[\backslash\mathbb{Q}$$

(a) Mostre que $A = [-1, 2]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap B$.

2- [6 val.] Sejam α e β constantes reais e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em todo o $\mathbb{R}$ pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) + \alpha & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \frac{e^{x-1} - x^2}{(x-1)} - \beta & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

(a) Determine os valores de α e β de modo que f seja contínua em $x = 1$.

(b) Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

(b1) f tem máximo e mínimo absolutos em $[0, 2]$;

(b2) f tem máximo absoluto em $\mathbb{R}$;

(b3) a equação $f(x) = 0$ tem solução em $\mathbb{R}$.

3- [8 val.] Considere a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$g(x) = \log(e^x + x^2 - 2x + 1) - x$$

(a) Diga, justificando, se g é contínua e se é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$.

(b) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de g.

(c) Determine, se existirem, os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) \text{ e } \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

(d) Determine o contradomínio de g.

(e) Faça um esboço do gráfico de g contendo a informação recolhida nas alíneas anteriores.

4- [3 val.] (a) Demonstre que para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$ temos

$$\log(x+1) - \log x > \frac{1}{x+1}$$

(b) Demonstre, por indução, que

$$\log(n) > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Errata: Na alínea (b) do exercício 4 do enunciado deveria estar

$$\log(n) > \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right) - 2$$

em vez de

$$\log(n) > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$