Ficha 0

Análise Matemática I

Curso LESIM-Taguspark, 2^o Semestre de 2001/2002

I- *Números reais*

1- Diga se são verdadeiras ou falsas, justificando com uma demonstração ou contra-exemplo, as seguintes afirmações:

(a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ para quaisquer números reais positivos a e b;

(b) $(a+b)^n = a^n + b^n$ para quaisquer números reais a e b;

(c) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ para quaisquer números reais a e b;

(d) Se a e b são números racionais então $a+b$ é um número racional;

(e) Se a e b são números irracionais então $a+b$ é um número irracional;

(f) Se a e b são números racionais então $a \times b$ é um número racional;

(g) Se a e b são números irracionais então $a \times b$ é um número irracional;

(h) Se a é um número racional não nulo e b é um número irracional então $a+b$ e $a \times b$ são números irracionais;

2- Diga, justificando, quais dos seguintes números reais são racionais:

$$3 \qquad \sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{3} \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \qquad \log_{10}(\sqrt{0,1}) \qquad \log_{10}(2)$$

3- Demonstre, para $x, y \in \mathbb{R}$, as seguintes proposições:

(a) $|x| < y \Leftrightarrow x < y \wedge x > -y$;

(b) $|x| > y \Leftrightarrow x < -y \vee x > y$;

(c) $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

II- *Lógica proposicional*

1- Sejam p e q duas proposições e $\neg p$ e $\neg q$ as suas negações. Quais das seguintes proposições são equivalentes a $p \Rightarrow q$:

(a)$p \Leftrightarrow q$;

(b)$p \vee \neg q$;

(c)$q \Rightarrow p$;

(d)$\neg p \vee q$;

(e)$\neg q \Rightarrow \neg p$.

2- Escreva as negações das seguintes afirmações:

(a) Se ele passou ao exame de matemática então sabe calcular derivadas.

(b) Ele viu o Papa se e só se foi a Roma.

(c) Ele tem carro e carta de condução.

(e) Qualquer português gosta de bacalhau.

(f) Existe uma árvore que mede mais de 150 metros de altura.

(g) Para qualquer pessoa X existe uma pessoa Y tal que Y é pai de X.

(h) Existe uma pessoa X que para qualquer pessoa Y, X é pai de Y.

Considere agora uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(i) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} : f(y) = x$.

(j) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

(k) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} f(y) = x$.

Diga qual o significado das três últimas proposições.