Correção do 1^o Teste

Cálculo Diferencial e Integral I

Tagus 2^afase, 2^o Semestre de 2006/2007

Versão A

Duração: 1 hora e 30 minutos

Data: 15/ 12/ 2007

1-

$$\text{(a)}\ \log\left(\frac{3}{x^2-x+1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2-x+1} \geq 1$$

Como $x^2-x+1 = x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$ temos que:

$$\frac{3}{x^2-x+1} \geq 1 \Leftrightarrow 3 \geq x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-x-2 \leq 0$$

Os zeros do polinómio x^2-x-2 são, pela fórmula resolvente,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -1 \text{ ou } 2$$

Portanto, sendo o coeficiente do termo quadrático positivo, o polinómio x^2-x-2 é menor ou igual a zero entre as suas raízes, incluindo estas. Ou seja $A = [-1,2]$

(b) $A \cap B = [\sqrt{2}, 2] \setminus \mathbb{Q}$

O conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é $[2, +\infty[$, o conjunto dos minorantes de $A \cap B$ é $]-\infty, \sqrt{2}]$, o supremo de $A \cap B$ é 2, o ínfimo de $A \cap B$ é $\sqrt{2}$, o máximo de $A \cap B$ não existe (pois $2 \in \mathbb{Q}$, logo $2 \notin A \cap B$) e o mínimo de $A \cap B$ é $\sqrt{2}$.

2-

(a) f é contínua em $x=1$ sse

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{a \to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$x \to 1^+ \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to +\infty \Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) \to \frac{\pi}{2}$$

Deste modo,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha = f(1) = 1$$

donde tiramos $\alpha = 1 - \frac{\pi}{2}$.

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1} - x^2}{x-1} - \beta$$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-x^2}{x-1}$ dá uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e como tanto o numerador como o denominador são funções diferenciáveis podemos usar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1} - x^2}{x-1} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1} - 2x}{1} = 1 - 2 = -1$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 - \beta = 1$$

donde tiramos $\beta = -2$.

(b)

(b1) Verdadeira. f é contínua em todo o $\mathbb{R}$, logo é contínua no intervalo $[0,2]$. Assim, sendo $[0,2]$ um intervalo limitado e fechado, temos pelo teorema de Weierstrass que f restrita ao intervalo $[0,2]$ tem necessariamente máximo e mínimo absolutos.

(b2) Falsa.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{r\to -\infty} \frac{e^{x-1} - x^2}{x-1} - \beta \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x-1} - 2x}{1} - \beta = +\infty$$

Logo f não tem máximo absoluto em $\mathbb{R}$.

(b3) Verdadeira. $f(1) = 1 > 0$ e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) + \alpha = \alpha = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

Logo, sendo f contínua, temos como consequencia do teorema do valor intermédio que existirá um x entre 1 e $+\infty$ tal que $f(x) = 0$.

3-

(a) $x^2 - 2x + 1$ é um polinómio, logo é contínuo e se é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$.

e^x também é contínua e diferenciável em todo o $\mathbb{R}$.

Portanto $e^x + x^2 - 2x + 1$ é contínua e diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, pois é a soma de duas funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

$\log x$ é contínua e diferenciável em todo o $\mathbb{R}^+$, como $e^x + x^2 - 2x + 1 = e^x + (x-1)^2 > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que $\log(e^x + x^2 - 2x + 1)$ é contínua e diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, pois é a composição de duas funções contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

Portanto g é contínua e diferenciável em todo o $\mathbb{R}$.

(b)

$$g'(x) = \frac{(e^x + x^2 - 2x + 1)'}{e^x + x^2 - 2x + 1} - 1 = \frac{(e^x + 2x - 2}{e^x + x^2 - 2x + 1} - \frac{e^x + x^2 - 2x + 1}{e^x + x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \frac{e^x + 2x - 2 - e^x - x^2 + 2x - 1}{e^x + x^2 - 2x + 1} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{e^x + x^2 - 2x + 1}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2} = 1 \text{ ou } 3$$

x		1		3	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$

Portanto temos que g tem um máximo local em $x = 3$ com valor $g(3) = \log(e^3 + 4) - 3$ e tem um mínimo local em $x = 1$ com valor $g(1) = 0$.

Os intervalos de monotonia são:

$]-\infty, 1[$ onde g é decrescente,

$]1, 3[$ onde g é dcrescente, e

$]3, +\infty[$ onde g é decrescente.

(c)

$$g(x) = \log(e^x + x^2 - 2x + 1) - x = \log(e^x + x^2 - 2x + 1) - \log(e^x) =$$

$$= \log\left(\frac{e^x + x^2 - 2x + 1}{e^x}\right) = \log\left(1 + \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}\right)$$

Quando x tende para $-\infty$, $x^2 - 2x + 1$ tende para $+\infty$ e e^x tende para 0^+. Logo a função auxiliar

$$t(x) = 1 + \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$$

tende para $+\infty$ e portanto

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{t(x) \to +\infty} \log(t(x)) = +\infty$$

Quando x tende para $-\infty$, $x^2 - 2x + 1$ e e^x tendem para $+\infty$. Neste caso usamos a regra de Cauchy para levantar a indeterminação:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 2}{e^x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Portanto

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \log(1 + 0) = 0$$

(d) Como o único mínimo local de g é menor ou igual que os limites de g quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$, temos que $g(0) = 0$ é mínimo absoluto de g. Por outro lado, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$. Logo, sendo g uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$, g toma todos os valores de 0 a $+\infty$. Portanto o contradomínio de g é o conjunto $[0, +\infty[$.

(e)

4- (a) log é uma função diferenciável em $]x, x+1[$ e contínua em $[x, x+1]$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$. Podemos então aplicar o teorema de Lagrange à função log obtendo

$$\log(x+1) - \log(x) = \frac{\log(x+1) - \log(x)}{x + 1 - x} = \log'(c) = \frac{1}{c} \text{ para algum } c \in]x, x+1[.$$

Como $c \in]x, x + 1[\Rightarrow c < x + 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$ temos

$$\log(x + 1) - \log x > \frac{1}{x + 1}$$

(b) (Demonstração com a gralha no enunciado)

Para $n = 1$

$$\log(1) > \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} \Leftrightarrow 0 > 1 \text{ é falso}$$

logo não se pode mostrar por indução (ou por qualquer outro método) uma proposição que é falsa.

Errata: No enunciado deveria estar

$$\log(n) > \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - 2$$

Neste caso a demonstração seria assim:
Para $n = 1$

$$\log(1) > \left(\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i}\right) - 2 \Leftrightarrow 0 > 1 - 2 \text{ é verdade}$$

Hipótese de indução:

$$\log(n) > \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - 2$$

Tese de indução:

$$\log(n+1) > \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}\right) - 2$$

Dem.

$$\begin{array}{rcll}
\log(n+1) & = & \log(n+1) - \log(n) + \log(n) & \\
& > & \log(n+1) - \log(n) + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - 2 & \text{por hipótese de indução} \\
& > & \frac{1}{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - 2 & \text{pela a alínea (a)} \\
& = & \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}\right) - 2 &
\end{array}$$