Cálculo Diferencial e Integral I (Época de repescagem)

Cursos LEE, LEGI, LEIC e LERC 2^o Semestre de 2010/2011

Enunciado com resolução (versão A)

1- Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - \pi| \leq x + \pi\} \qquad B = [1, 5] \cap \mathbb{Q}$$

(a) Mostre que $A = [0, \pi]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap B$.

Resposta à questão 1:

(a)

$$|3x - \pi| \leq x + \pi \Leftrightarrow (3x - \pi \leq x + \pi) \wedge (3x - \pi \geq -x - \pi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x \leq 2\pi \wedge 4x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi$$

Portanto $A = [0, \pi]$.

(b) $A \cap B = [1, \pi] \cap \mathbb{Q} = [1, \pi[\cap \mathbb{Q}$.

O conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é $[\pi, +\infty[$, o conjunto dos minorantes de $A \cap B$ é $]-\infty, 1]$, o supremo de $A \cap B$ é π, o ínfimo de $A \cap B$ é 1, o máximo de $A \cap B$ não existe (pois o supremo não pertence a $A \cap B$) e o mínimo de $A \cap B$ é 1.

2- A sucessão u_n encontra-se definida através de:

$$u_1 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{4}$$

(a) Mostre que u_n é uma sucessão crescente e que $u_n < 1$, para todo o número natural n.

(b) Mostre que u_n é convergente e calcule o seu limite.

Resposta à questão 2:

(a) Vamos mostrar primeiro por indução que $u_n < u_{n+1} < 1$ para todo o número natural n (o que mostra que a sucessão é crescente e majorada por 1):
Para $n = 1$ a proposição é verdadeira pois equivale $0 < \frac{1}{4} < 1$ (já que $u_1 = 0$ e $u_2 = \frac{1}{4}$).
Consideremos agora, por hiótese de indução, que

$$u_n < u_{n+1} < 1 \quad \text{Hipótese de indução (H.I.)}$$

para um n fixo. Vamos então usar esta hipótese para demonstrar a tese de indução:

$$u_{n+1} < u_{n+2} < 1 \quad \text{Tese de indução}$$

demostração: $u_n < u_{n+1} < 1 \Rightarrow 2u_n < 2u_{n+1} < 2 \Rightarrow 2u_n + 1 < 2u_{n+1} + 1 < 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2u_n + 1}{4} < \frac{2u_{n+1} + 1}{4} < \frac{3}{4} \overset{\frac{3}{4}<1}{\Rightarrow} u_{n+1} < u_{n+2} < 1.$$

(b) Como u_n é uma sucessão crescente e majorada então é convergente. Seja $L = \lim u_n$, então temos que:

$$L = \lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n + 1}{4} = \frac{2 \lim u_n + 1}{4} = \frac{2L + 1}{4}$$

Desta igualdade tiramos que $4L = 2L + 1$, logo $L = \frac{1}{2}$.

3- Considere a seguinte função f definida em todo o $\mathbb{R}$ pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} & \text{se } x > 2 \\ \alpha & \text{se } x = 2 \\ \frac{e^x - e^2}{x-2} + \beta & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

sendo α e β os valores reais que tornam a função f contínua em todo o $\mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α e β.

(b) Calcule os limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

(c) Prove que a equação $f(x) + \operatorname{sen} x = 10 + \alpha$ tem solução para $x > 0$.

Resposta à questão 3:

(a) Para que f seja contínua em todo o $\mathbb{R}$, em particular para $x = 2$, é necessário que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

Assim,

$$\alpha = f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} =$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2} = 2\sqrt{2}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^x - e^2}{x-2} + \beta = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^2(e^{x-2}-1)}{x-2} + \beta = e^2 + \beta$$

Logo, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$ se só se $e^2 + \beta = \alpha = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \beta = 2\sqrt{2} - e^2$.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}+\sqrt{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^2}{x-2} + \beta = \frac{0-e^2}{-\infty} + \beta = \beta = 2\sqrt{2} - e^2$$

(c) Seja $g(x) = f(x) + \operatorname{sen} x$. A função g é contínua em todo o $\mathbb{R}$. Além disso $g(2) = \alpha + \operatorname{sen} 2 < 10 + \alpha$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ logo, pelo teorema do valor intermédio, existe um ponto x entre 2 e $+\infty$ tal que $g(x) = 10 + \alpha$.

4- Caso existam, calcule os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$) das seguintes sucessões:

$$u_n = \sqrt{n^2+2n+3} - n, \quad v_n = \sqrt[n]{\frac{(n+2)!(n-1)!}{(2n)!}}, \quad w_n = \left(\frac{n^2-3}{n^2+1}\right)^{n^2+3}$$

Resposta à questão 4:

u_n:

$$\lim u_n = \lim \sqrt{n^2+2n+3} - n = \lim \frac{(\sqrt{n^2+2n+3}-n)(\sqrt{n^2+2n+3}+n)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} =$$

$$= \lim \frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} = \lim \frac{2n+3}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+n} = \lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = 1$$

v_n:

$v_n = \lim \sqrt[n]{a_n}$ com $a_n = \frac{(n+2)!(n-1)!}{(2n)!}$. Como

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+3)!n!}{(2n+2)!}}{\frac{(n+2)!(n-1)!}{(2n)!}} = \lim \frac{(n+3)n}{(2n+2)(2n+1)} = \lim \frac{n^2+3n}{4n^2+3n+2} = \frac{1}{4}$$

temos que $\lim v_n = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$.

w_n:

$$\lim w_n = \lim \left(\frac{n^2-3}{n^2+1}\right)^{n^2+3} = \lim \left(1+\frac{-4}{n^2+1}\right)^{n^2+1} \left(1+\frac{-4}{n^2+1}\right)^2 =$$
$$= e^{-4} \times 1^2 = e^{-4}$$

5- Calcule as derivadas das funções dadas pelas seguintes expressões:

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x) + \log x \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}\cos(x+2)$$

Resposta à questão 5:

$$f'(x) = (\operatorname{arcsen}(e^x))' + (\log x)' = \frac{(e^x)'}{\sqrt{1-(e^x)^2}} + \frac{1}{x} =$$
$$= \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \big(\sqrt{x}\cos(x+2)\big)' = (\sqrt{x})'\cos(x+2) + \sqrt{x}(\cos(x+2))' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x+2) + \sqrt{x}(-\operatorname{sen}(x+2)) = \frac{\cos(x+2)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\operatorname{sen}(x+2)$$

6- Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função par e contínua em todo o $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e para $x \geq 0$ satisfaz a igualdade $xf(x) = \cos(f(x))$. Mostre que f tem um máximo absoluto em $\mathbb{R}$.

Resposta à questão 6:

Se, para $x \geq 0$, $xf(x) = \cos(f(x))$ então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(f(x))}{x} = 0$.

Logo, juntamente com o facto de $f(0) = \frac{\pi}{2} > 0$, existe um valor real $a > 0$ tal que, para $x > a$, $f(x) < f(0)$.

Uma vez que f é par temos também que, para $x < -a$, $f(x) < f(0)$.

Assim temos que, para $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$, $f(x) < f(0)$.

Como f é contínua em $\mathbb{R}$ (em particular f é contínua em $[-a, a]$), pelo teorema de Weierstrass, temos que f tem um máximo M em $[-a, a]$ que será naturalmente maior ou igual a $f(0)$. Logo será um máximo absoluto em $\mathbb{R}$.

Início do segundo teste

7- Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

(b) Determine, se existirem, os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(f(x))}{x} \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Resposta à questão 7:

(a)

$$f'(x) = (x^2+x+1)'e^x+(x^2+x+1)(e^x)' = (2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x = (x^2+3x+2)e^x = (x+2)(x+1)e^x$$

$$Cal.Aux.: \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

x		-2		-1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$

Portanto temos que f tem um máximo local em $x = -2$ com valor $f(-2) = 3e^{-2}$ e um mínimo local em $x = -1$ com valor $f(-1) = e^{-1}$.
Os intervalos de monotonia são:
$]-\infty, -2[$ onde f é crescente,
$]-2, -1[$ onde f é decrescente, e
$]-1, +\infty[$ onde f é crescente.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(f(x))}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+3x+2)e^x}{(x^2+x+1)e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2+x+1)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{e^{-x}} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{R.C.}{=}$$
$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{-e^{-x}} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0$$

8- Determine, no seu domínio, uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\sqrt[5]{x} + \frac{e^x-2x}{e^x-x^2}$;

(b) $x^2 \cos x$

(c) $\frac{x^2+x-3}{x^3+x}$;

(d) $\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ (faça $x = \operatorname{sen} t$).

Resposta à questão 8:

(a)

$$\int \sqrt[5]{x} + \frac{e^x - 2x}{e^x - x^2}\,\mathrm{dx} = \int x^{\frac{1}{5}}\,\mathrm{dx} + \int \frac{e^x - 2x}{e^x - x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + \int \frac{(e^x - x^2)'}{e^x - x^2}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + \log(|e^x - x^2|)$$

(b) Primitivando por partes: $\int u'v = uv - \int uv'$ com $u' = \cos x$ e $v = x^2$. Portanto temos $u = \operatorname{sen} x$ e $v' = 2x$. Aplicando a fórmula da primitivação por partes obtemos:

$$\int x^2 \cos x\,\mathrm{dx} = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\,\mathrm{dx}$$

Usando novamente primitivação por partes em $\int 2x \operatorname{sen} x\,\mathrm{dx}$ com $u' = \operatorname{sen} x$ e $v = 2x$, temos

$$\begin{aligned}
\textstyle\int x^2 \cos x\,\mathrm{dx} &= x^2 \operatorname{sen} x - \textstyle\int 2x \operatorname{sen} x\,\mathrm{dx} \\
&= x^2 \operatorname{sen} x - \left(-2x\cos x + \textstyle\int 2\cos x\,\mathrm{dx}\right) \\
&= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

(c) $\frac{x^2+x-3}{x^3+x} = \frac{x^2+x-3}{x(x^2+1)}$ é uma função racional em que o grau do numerador é menor que o grau do denominador. Portanto, $\frac{x^2+x-3}{x(x^2+1)}$ decompõe-se em fracções simples da seguinte forma:

$$\frac{x^2+x-3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

onde A e B são as únicas constantes que verificam as igualdades. Donde se deduz que

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ C &= 1 \\ A &= -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= -3 \\ B &= 4 \\ C &= 1 \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int \frac{x^2+x-3}{x^3+x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{-3}{x} + \frac{4x+1}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = -3\log(|x|) + 2\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{dx} + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx} =$$

$$= -3\log(|x|) + 2\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x$$

(d) Considerando a mudança de variável $x = \operatorname{sen} t$ (e portanto $\mathrm{dx} = \cos t\,\mathrm{dt}$), temos que

$$\begin{aligned} \int \tfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} &= \int \tfrac{1}{\operatorname{sen}^2 t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \cos t\,\mathrm{dt} \\ &= \int \tfrac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t \cos t}\,\mathrm{dt} \\ &= \int \tfrac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t \cos t}\,\mathrm{dt} \\ &= \int \tfrac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{dt} \\ &= -\operatorname{cotg} t \\ &= -\tfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \\ &= -\tfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{aligned}$$

9- Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 \leq y \leq x\}$$

Esboce o conjunto S e calcule a sua área.

Resposta à questão 9:

$$x^2 - 2 \leq y \leq x \Rightarrow x^2 - 2 \leq x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

Portanto o conjunto S está compreendido entre as curvas de equação cartesiana $y = x$ (acima) e $y = x^2 - 2$ (abaixo) para valores de x entre -1 e 2.

Deste modo a sua área será dada pelo valor do integral definido

$$\int_{-1}^{2} x - (x^2 - 2)\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{2} x - x^2 + 2\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{x=-1}^{x=2} = 2 - \frac{8}{3} + 4 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2) = \frac{9}{2}$$

Nota- Por motivos técnicos esta resolução não inclui um esboço de S.

10- Considere a função
$$f(x) = e^x \cos x$$
(a) Determine o polinómio de Taylor de grau menor ou igual 2 em torno do ponto $a = \frac{\pi}{2}$ da função f.

(b) Mostre que existe um ponto $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ onde o polinómio de Taylor de grau um em torno desse ponto é dado por:

$$p_{1,c}(x) = e^c \cos(c) - \frac{2(x-c)}{\pi}$$

Resposta à questão 10:

(a) O polinómio de Taylor de grau 2 em $a = \frac{\pi}{2}$ da função $f(x) = e^x \cos x$ é dado pela expressão:

$$p_{2,\frac{\pi}{2}}(x) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2$$

$f(x) = e^x \cos x \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$,
$f'(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{\frac{\pi}{2}}$,
$f''(x) = -2e^x \operatorname{sen} x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{2}) = -2e^{\frac{\pi}{2}}$.
Portanto, o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = \frac{\pi}{2}$ da função $f(x) = e^x \cos x$ é

$$p_{2,\frac{\pi}{2}}(x) = -e^{\frac{\pi}{2}}(x - \frac{\pi}{2}) - e^{\frac{\pi}{2}}(x - \frac{\pi}{2})^2$$

(b) O polinómio de Taylor de grau um em torno dum ponto c da função $f(x) = e^x \cos x$ é dado pela expressão:

$$p_{1,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) = e^c \cos(c) + f'(c)(x-c)$$

pelo que, tudo o que temos a demonstrar é que existe um ponto $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $f'(c) = -\frac{2}{\pi}$.
Tal é garantido pelo teorema de Lagrange, uma vez que

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

11- Determine a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n)}{n^3+n^2} \qquad\qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n+n^2}$$

Resposta à questão 11:

(a) Vamos comparar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n)}{n^3+n^2}$ com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim \frac{\frac{n+\operatorname{sen}(n)}{n^3+n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^3+n^2\operatorname{sen}(n)}{n^3+n^2} = \lim \frac{\cancel{n}^3(1+\frac{\operatorname{sen}(n)}{n})}{\cancel{n}^3(1+\frac{1}{n})} = 1$$

Como $1 \in]0,+\infty[$ temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n)}{n^3+n^2}$ tem a mesma natureza que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que é convergente pelo critério de Dirichlet ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$).

(b) Seja $a_n = \frac{n^3}{4^n+n^2}$.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^3}{4^{n+1}+(n+1)^2}}{\frac{n^3}{4^n+n^2}} = \lim \frac{(n+1)^3(4^n+n^2)}{(4^{n+1}+(n+1)^2)n^3} = \lim \frac{(n+1)^3}{n^3} \lim \frac{4^n+n^2}{4^{n+1}+(n+1)^2} =$$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \lim \frac{4^n(1+\frac{n^2}{4^n})}{4^{n+1}(1+\frac{(n+1)^2}{4^{n+1}})} = \frac{1}{4}$$

Como $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, temos, pelo critério da razão, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n+n^2}$ é convergente.

12- Seja f uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte igualdade:

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{1+2e^t}{f(t)}\,\mathrm{dt}$$

(a) Diga, justificando, se f é diferenciável ou não.

(b) Determine f.

Resposta à questão 12:

(a) Sendo f uma função contínua e positiva (logo não-nula) em $\mathbb{R}$ (de acordo com o enunciado) temos que $\frac{1+2e^t}{f(t)}$ é também uma função contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral indefinido $\int_1^x \frac{1+2e^t}{f(t)}\,\mathrm{dt}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo $f(x) = e^{\int_1^x \frac{1+2e^t}{f(t)}\,\mathrm{dt}}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$.

(b) Derivando ambos os termos da igualdade

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{1+2e^t}{f(t)}\,\mathrm{dt} \tag{1}$$

(usando o Teorema Fundamental do Cálculo no segundo termo) obtemos a seguinte igualdade

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+2e^x}{f(x)}$$

donde tiramos

$$f'(x) = 1 + 2e^x$$

Portanto, $f(x)$ é uma primitiva de $1+2e^x$, logo

$$f(x) = x + 2e^x + c$$

sendo c uma constante.

Além disso, f satisfaz a igualdade (1), donde resulta, com $x = 0$, que

$$\log(f(0)) = 0 \Leftrightarrow 2 + c = 1 \Leftrightarrow c = -1$$

Resumindo, a função f é dada pela expressão

$$f(x) = x + 2e^x - 1$$