# Cálculo Diferencial e Integral I (Época de repescagem)

## Cursos LEE, LEGI, LEIC e LERC $2^o$ Semestre de 2010/2011

### Enunciado com resolução (versão B)

**1-** Sejam $A$ e $B$ os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x + \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} - x\} \qquad B = [-2, -1] \cap \mathbb{Q}$$

(a) Mostre que $A = [-\sqrt{2}, 0]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap B$.

---

Resposta à questão 1:

(a)

$$|3x + \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} - x \Leftrightarrow (3x + \sqrt{2} \leq \sqrt{2} - x) \wedge (3x + \sqrt{2} \geq -\sqrt{2} + x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x \leq 0 \wedge 2x \geq -2\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq 0$$

Portanto $A = [-\sqrt{2}, 0]$.

(b) $A \cap B = [-\sqrt{2}, -1] \cap \mathbb{Q} = ]-\sqrt{2}, -1] \cap \mathbb{Q}$.

O conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é $[-1, +\infty[$, o conjunto dos minorantes de $A \cap B$ é $]-\infty, -\sqrt{2}]$, o supremo de $A \cap B$ é $-1$, o ínfimo de $A \cap B$ é $-\sqrt{2}$, o máximo de $A \cap B$ é $-1$ e o mínimo de $A \cap B$ não existe (pois o ínfimo não pertence a $A \cap B$).

**2-** A sucessão $u_n$ encontra-se definida através de:

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{3}$$

(a) Mostre que $u_n$ é uma sucessão decrescente e que $u_n > 0$, para todo o número natural $n$.

(b) Mostre que $u_n$ é convergente e calcule o seu limite.

---

Resposta à questão 2:

(a) Vamos mostrar primeiro por indução que $u_n > u_{n+1} > 0$ para todo o número natural $n$ (o que mostra que a sucessão é decrescente e minorada por 0):
Para $n = 1$ a proposição é verdadeira pois equivale $2 > \frac{5}{3} > 0$ (já que $u_1 = 2$ e $u_2 = \frac{5}{3}$).
Consideremos agora, por hiótese de indução, que

$$u_n > u_{n+1} > 0 \quad \text{Hipótese de indução (H.I.)}$$

para um $n$ fixo. Vamos então usar esta hipótese para demonstrar a tese de indução:

$$u_{n+1} > u_{n+2} > 0 \quad \text{Tese de indução}$$

$$\textit{demostração:} \quad u_n > u_{n+1} > 0 \Rightarrow 2u_n > 2u_{n+1} > 0 \Rightarrow 2u_n + 1 > 2u_{n+1} + 1 > 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2u_n + 1}{3} > \frac{2u_{n+1} + 1}{3} > \frac{1}{3} \overset{\frac{1}{3}>0}{\Rightarrow} u_{n+1} > u_{n+2} > 0.$$

(b) Como $u_n$ é uma sucessão decrescente e minorada então é convergente. Seja $L = \lim u_n$, então temos que:

$$L = \lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n + 1}{3} = \frac{2 \lim u_n + 1}{3} = \frac{2L + 1}{3}$$

Desta igualdade tiramos que $3L = 2L + 1$, logo $L = 1$.

**3-** Considere a seguinte função $f$ definida em todo o $\mathbb{R}$ pela expressão:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} & \text{se } x>3\\ \\ \alpha & \text{se } x=3\\ \\ \frac{e^x-e^3}{x-3}-\beta & \text{se } x<3\end{cases}$$

sendo $\alpha$ e $\beta$ os valores reais que tornam a função $f$ contínua em todo o $\mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de $\alpha$ e $\beta$.

(b) Calcule os limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

(c) Prove que a equação $f(x)+\cos x = 20+\alpha$ tem solução para $x>0$.

---

Resposta à questão 3:

(a) Para que $f$ seja contínua em todo o $\mathbb{R}$, em particular para $x=3$, é necessário que

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^-} f(x)=f(3)$$

Assim,

$$\alpha=f(3)=\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to3^+}\frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}=2\sqrt{3}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{e^x-e^3}{x-3}-\beta=\lim_{x\to3^-}\frac{e^3(e^{x-3}-1)}{x-3}-\beta=e^3-\beta$$

Logo, $\lim_{x\to3^-} f(x)=f(3)$ se só se $e^3-\beta=\alpha=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\beta=e^3-2\sqrt{3}$.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}+\sqrt{3}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^3}{x-3}-\beta=\frac{0-e^3}{-\infty}-\beta=-\beta=2\sqrt{3}-e^3$$

(c) Seja $g(x)=f(x)+\cos x$. A função $g$ é contínua em todo o $\mathbb{R}$. Além disso $g(3)=\alpha+\operatorname{sen}3<20+\alpha$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ logo, pelo teorema do valor intermédio, existe um ponto $x$ entre 3 e $+\infty$ tal que $g(x)=20+\alpha$.

**4-** Caso existam, calcule os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$) das seguintes sucessões:

$$u_n = \sqrt{n^2+3n+2} - n, \quad v_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!}}, \quad w_n = \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^2+3}$$

---

Resposta à questão 4:

$u_n$:

$$\lim u_n = \lim \sqrt{n^2+3n+2} - n = \lim \frac{(\sqrt{n^2+3n+2}-n)(\sqrt{n^2+3n+2}+n)}{\sqrt{n^2+3n+2}+n} =$$

$$= \lim \frac{n^2+3n+2-n^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n} = \lim \frac{3n+2}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+n} = \lim \frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1} = \frac{3}{2}$$

$v_n$:

$v_n = \lim \sqrt[n]{a_n}$ com $a_n = \frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!}$. Como

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+2)!n!}{(2n+2)!}}{\frac{(n+1)!(n-1)!}{(2n)!}} = \lim \frac{(n+2)n}{(2n+2)(2n+1)} = \lim \frac{n^2+2n}{4n^2+3n+2} = \frac{1}{4}$$

temos que $\lim v_n = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$.

$w_n$:

$$\lim w_n = \lim \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^2+3} = \lim \left(1+\frac{-3}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\left(1+\frac{-3}{n^2+1}\right)^2 =$$
$$= e^{-3} \times 1^2 = e^{-3}$$

**5-** Calcule as derivadas das funções dadas pelas seguintes expressões:

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(\log x) + e^x \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{sen}(x-3)$$

---

Resposta à questão 5:

$$\begin{aligned} f'(x) = (\operatorname{arcsen}(\log x))' + (e^x)' &= \frac{(\log x)'}{\sqrt{1-(\log x)^2}} + e^x = \\ &= \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} + e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\sqrt{x}\,\operatorname{sen}(x-3)\right)' = (\sqrt{x})'\operatorname{sen}(x-3) + \sqrt{x}(\operatorname{sen}(x-3))' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(x-3) + \sqrt{x}\cos(x-3) = \frac{\operatorname{sen}(x-3)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos(x-3) \end{aligned}$$

**6-** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função par e contínua em todo o $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e para $x \geq 0$ satisfaz a igualdade $xf(x) = \cos(f(x))$. Mostre que $f$ tem um máximo absoluto em $\mathbb{R}$.

---

Resposta à questão 6:

Se, para $x \geq 0$, $xf(x) = \cos(f(x))$ então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(f(x))}{x} = 0$.

Logo, juntamente com o facto de $f(0) = \frac{\pi}{2} > 0$, existe um valor real $a > 0$ tal que, para $x > a$, $f(x) < f(0)$.

Uma vez que $f$ é par temos também que, para $x < -a$, $f(x) < f(0)$.

Assim temos que, para $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$, $f(x) < f(0)$.

Como $f$ é contínua em $\mathbb{R}$ (em particular $f$ é contínua em $[-a, a]$), pelo teorema de Weierstrass, temos que $f$ tem um máximo $M$ em $[-a, a]$ que será naturalmente maior ou igual a $f(0)$. Logo será um máximo absoluto em $\mathbb{R}$.

## Início do segundo teste

**7-** Considere a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x)=(x^2-x-1)e^x$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de $f$.

(b) Determine, se existirem, os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(f(x))}{x}\ \text{ e }\ \lim_{x\to-\infty}f(x)$$

---

Resposta à questão 7:

(a)

$$f'(x)=(x^2-x-1)'e^x+(x^2-x-1)(e^x)'=(2x-1)e^x+(x^2-x-1)e^x=(x^2+x-2)e^x=(x+2)(x-1)e^x$$

$$Cal.Aux.:\quad x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}\Leftrightarrow x=-2\vee x=1$$

| $x$ | | $-2$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $f(-2)$ | $\searrow$ | $f(1)$ | $\nearrow$ |

Portanto temos que $f$ tem um máximo local em $x=-2$ com valor $f(-2)=5e^{-2}$ e um mínimo local em $x=1$ com valor $f(1)=-e$.

Os intervalos de monotonia são:
$]-\infty,-2[$ onde $f$ é crescente,
$]-2,1[$ onde $f$ é decrescente, e
$]1,+\infty[$ onde $f$ é crescente.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(f(x))}{x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x-2)e^x}{(x^2-x-1)e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-1}{e^{-x}}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{R.C.}{=}$$
$$\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{-e^{-x}}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0$$

**8-** Determine, no seu domínio, uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\sqrt[3]{x} + \frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3}$;

(b) $x^2 \operatorname{sen} x$

(c) $\frac{x^2+2x-1}{x^3+x}$;

(d) $\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ (faça $x = \operatorname{sen} t$).

---

Resposta à questão 8:

(a)

$$\int \sqrt[3]{x} + \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3}\,\mathrm{dx} = \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{dx} + \int \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3}\,\mathrm{dx} = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \int \frac{(e^x + x^3)'}{e^x + x^3}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \log(|e^x + x^3|)$$

(b) Primitivando por partes: $\int u'v = uv - \int uv'$ com $u' = \operatorname{sen} x$ e $v = x^2$. Portanto temos $u = -\cos x$ e $v' = 2x$. Aplicando a fórmula da primitivação por partes obtemos:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{dx} = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,\mathrm{dx}$$

Usando novamente primitivação por partes em $\int 2x\cos x\,\mathrm{dx}$ com $u' = \cos x$ e $v = 2x$, temos

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{dx} &= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,\mathrm{dx}\\ &= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - \int 2\operatorname{sen} x\,\mathrm{dx}\\ &= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x\end{aligned}$$

(c) $\frac{x^2+2x-1}{x^3+x} = \frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)}$ é uma função racional em que o grau do numerador é menor que o grau do denominador. Portanto, $\frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)}$ decompõe-se em fracções simples da seguinte forma:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}$$

onde $A$ e $B$ são as únicas constantes que verificam as igualdades. Donde se deduz que

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ C &= 2 \\ A &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= -1 \\ B &= 2 \\ C &= 2 \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3+x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{-1}{x} + \frac{2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = -\log(|x|) + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{dx} + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx} =$$

$$= -\log(|x|) + \log(x^2+1) + 2\,\mathrm{arctg}\, x$$

(d) Considerando a mudança de variável $x = \operatorname{sen} t$ (e portanto $\mathrm{dx} = \cos t\,\mathrm{dt}$), temos que

$$\begin{aligned} \int \tfrac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}\,\mathrm{dx} &= \int \tfrac{1}{(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t})^3}\cos t\,\mathrm{dt} \\ &= \int \tfrac{\cos t}{\cos^3 t}\,\mathrm{dt} \\ &= \int \tfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{dt} \\ &= \operatorname{tg} t \\ &= \tfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \\ &= \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

**9-** Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2x \leq y \leq 3 - x^2\}$$

Esboce o conjunto $S$ e calcule a sua área.

---

Resposta à questão 9:

$$-2x \leq y \leq 3 - x^2 \Rightarrow -2x \leq 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

Portanto o conjunto $S$ está compreendido entre as curvas de equação cartesiana $y = 3-x^2$ (acima) e $y = -2x$ (abaixo) para valores de $x$ entre $-1$ e 3.

Deste modo a sua área será dada pelo valor do integral definido

$$\int_{-1}^{3} 3-x^2-(-2x)\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{3} 3-x^2+2x\,\mathrm{dx} = \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{x=-1}^{x=3} = 9-\frac{27}{3}+9-(-3+\frac{1}{3}+1) = \frac{32}{3}$$

Nota- Por motivos técnicos esta resolução não inclui um esboço de $S$.

**10-** Considere a função

$$f(x) = e^x \operatorname{sen} x$$

(a) Determine o polinómio de Taylor de grau menor ou igual 2 em torno do ponto $a = \pi$ da função $f$.

(b) Mostre que existe um ponto $c \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ onde o polinómio de Taylor de grau um em torno desse ponto é dado por:

$$p_{1,c}(x) = e^c \operatorname{sen}(c) + \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}(x-c)}{\pi}$$

---

Resposta à questão 10:

(a) O polinómio de Taylor de grau 2 em $a = \pi$ da função $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ é dado pela expressão:

$$p_{2,\pi}(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2$$

$f(x) = e^x \operatorname{sen} x \Rightarrow f(\pi) = e^\pi \operatorname{sen}(\pi) = 0,$
$f'(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) \Rightarrow f'(\pi) = -e^\pi,$
$f''(x) = 2e^x \cos x \Rightarrow f''(\pi) = -2e^\pi.$
Portanto, o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = \pi$ da função $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ é

$$p_{2,\pi}(x) = -e^\pi(x-\pi) - e^\pi(x-\pi)^2$$

(b) O polinómio de Taylor de grau um em torno dum ponto $c$ da função $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ é dado pela expressão:

$$p_{1,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) = e^c \operatorname{sen}(c) + f'(c)(x-c)$$

pelo que, tudo o que temos a demonstrar é que existe um ponto $c \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $f'(c) = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi}$.
Tal é garantido pelo teorema de Lagrange, uma vez que

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi}$$

**11-** Determine a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n)}{n^2+2n} \qquad\qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{6^n+n^3}$$

---

Resposta à questão 11:

(a) Vamos comparar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n)}{n^2+2n}$ com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim \frac{\frac{n+\operatorname{sen}(n)}{n^2+2n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2+n\operatorname{sen}(n)}{n^2+2n} = \lim \frac{\cancel{n}^2(1+\frac{\operatorname{sen}(n)}{n})}{\cancel{n}^2(1+\frac{2}{n})} = 1$$

Como $1 \in ]0,+\infty[$ temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\operatorname{sen}(n)}{n^2+2n}$ tem a mesma natureza que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que é divergente pelo critério de Dirichlet ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$).

(b) Seja $a_n = \frac{n^2}{6^n+n^3}$.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^2}{6^{n+1}+(n+1)^3}}{\frac{n^2}{6^n+n^3}} = \lim \frac{(n+1)^2(6^n+n^3)}{(6^{n+1}+(n+1)^3)n^2} = \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} \lim \frac{6^n+n^3}{6^{n+1}+(n+1)^3} =$$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \lim \frac{6^n(1+\frac{n^3}{6^n})}{6^{n+1}(1+\frac{(n+1)^3}{6^{n+1}})} = \frac{1}{6}$$

Como $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, temos, pelo critério da razão, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{6^n+n^3}$ é convergente.

**12-** Seja $f$ uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte igualdade:

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{2 - e^t}{f(t)}\,\mathrm{dt}$$

(a) Diga, justificando, se $f$ é diferenciável ou não.

(b) Determine $f$.

---

Resposta à questão 12:

(a) Sendo $f$ uma função contínua e positiva (logo não-nula) em $\mathbb{R}$ (de acordo com o enunciado) temos que $\frac{2-e^t}{f(t)}$ é também uma função contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral indefinido $\int_1^x \frac{2-e^t}{f(t)}\,\mathrm{dt}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo $f(x) = e^{\int_1^x \frac{2-e^t}{f(t)}\,\mathrm{dt}}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$.

(b) Derivando ambos os termos da igualdade

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{2 - e^t}{f(t)}\,\mathrm{dt} \tag{1}$$

(usando o Teorema Fundamental do Cálculo no segundo termo) obtemos a seguinte igualdade

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2 - e^x}{f(x)}$$

donde tiramos

$$f'(x) = 2 - e^x$$

Portanto, $f(x)$ é uma primitiva de $2 - e^x$, logo

$$f(x) = 2x - e^x + c$$

sendo $c$ uma constante.

Além disso, $f$ satisfaz a igualdade (1), donde resulta, com $x = 0$, que

$$\log(f(0)) = 0 \Leftrightarrow -1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 2$$

Resumindo, a função $f$ é dada pela expressão

$$f(x) = 2x - e^x + 2$$