1^o-Teste (Com resolução)

Cálculo Diferencial e Integral I

Cursos LEE, LEGI, LEIC e LERC 2^o Semestre de 2010/2011

Duração: hora e meia

Versão A

1- Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |4x+1| \geq 2x^2+1\} \qquad B =]-2, 1[$$

(a) Mostre que $A = \{-1\} \cup [0, 2]$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap B$.

Resposta à questão 1:

(a)

$$|4x+1| \geq 2x^2+1 \Leftrightarrow 4x+1 \geq 2x^2+1 \vee 4x+1 \leq -2x^2-1 \Leftrightarrow 2x^2-4x \leq 0 \vee 2x^2+4x+2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$x(x-2) \leq 0 \vee 2(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \leq 2) \vee x+1 = 0$$

Portanto $A = \{-1\} \cup [0, 2]$.

(b) $A \cap B = \{-1\} \cup [0, 1[$

O conjunto dos majorantes de $A \cap B$ é $[1, +\infty[$, o conjunto dos minorantes de $A \cap B$ é $]-\infty, -1]$, o supremo de $A \cap B$ é 1, o ínfimo de $A \cap B$ é -1, o máximo de $A \cap B$ não existe (pois o supremo não pertence a $A \cap B$) e o mínimo de $A \cap B$ é -1.

2- A sucessão u_n encontra-se definida através de:

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}$$

(a) Mostre que u_n é uma sucessão crescente e que $u_n < 3$, para todo o número natural n.

(b) Mostre que u_n é convergente e calcule o seu limite.

Resposta à questão 2:

(a) Vamos mostrar primeiro por indução que $u_n < u_{n+1} < 3$ para todo o número natural n (o que mostra que a sucessão é crescente e majorada por 3):

Para $n = 1$ a proposição é verdadeira pois equivale $1 < \frac{3}{2} < 3$ (já que $u_1 = 1$ e $u_2 = \frac{3}{2}$).

Consideremos agora, por hiótese de indução, que

$$u_n < u_{n+1} < 3 \quad \text{Hipótese de indução (H.I.)}$$

para um n fixo. Vamos então usar esta hipótese para demonstrar a tese de indução:

$$u_{n+1} < u_{n+2} < 3 \quad \text{Tese de indução}$$

$$\textit{demostração:} \quad u_n < u_{n+1} < 3 \overset{u_n > 0}{\Rightarrow} u_n^2 < u_{n+1}^2 < 9 \Rightarrow u_n^2 + 8 < u_{n+1}^2 + 8 < 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u_n^2 + 8}{6} < \frac{u_{n+1}^2 + 8}{6} < \frac{17}{6} \overset{\frac{17}{6} < 3}{\Rightarrow} u_{n+1} < u_{n+2} < 3.$$

Nota: na primeira implicação usamos o facto de $u_n > 0$, que é válido pois a sucessão é crescente até n e $u_1 = 1 > 0$.

(b) Como u_n é uma sucessão crescente e majorada então é convergente. Seja $L = \lim u_n$, então temos que:

$$L = \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 8}{6} = \frac{(\lim u_n)^2 + 8}{6} = \frac{L^2 + 8}{6}$$

Desta igualdade tiramos que $L^2 - 6L + 8 = 0$, logo $L = 2$ ou $L = 4$. Como $u_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, o limite não pode ser 4 logo tem que ser 2.

3- Considere a seguinte função f definida em todo o $\mathbb{R}$ pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} - \frac{\alpha}{x} & \text{se } x > 1 \\ -2 & \text{se } x = 1 \\ |x| - \sqrt{x^2+\beta} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

sendo α e β os valores reais que tornam a função f contínua em todo o $\mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α e β.

(b) Calcule os limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

(c) Prove que f tem um mínimo sem necessariamente determiná-lo.

Nota: No enunciado feito durante o teste estava $x - \sqrt{x^2+\beta}$ em vez de $|x| - \sqrt{x^2+\beta}$ o que impossibilitava a resolução da alínea (c).

Resposta à questão 3:

(a) Para que f seja contínua em todo o $\mathbb{R}$, em particular para $x = 1$, é necessário que

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} - \frac{\alpha}{x} = \left(\lim_{x\to1^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi(x-1)+\pi)}{x-1}\right) - \alpha = \left(\lim_{x\to1^+} \frac{-\operatorname{sen}(\pi(x-1))}{\pi(x-1)}\pi\right) - \alpha =$$

$$= \left(\lim_{y=\pi(x-1)\to0^+} -\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\pi\right) - \alpha = -\pi - \alpha$$

Portanto, $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ se só se $-\pi - \alpha = -2$, ou seja, $\alpha = 2 - \pi$.
Por outro lado,

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} |x| - \sqrt{x^2+\beta} = 1 - \sqrt{1+\beta}$$

Assim, $\lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ se só se $1 - \sqrt{1+\beta} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{1+\beta} = 3 \Leftrightarrow \beta = 8$.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} - \frac{\alpha}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} - 0 = 0$$

pois $\operatorname{sen}(\pi x)$ é uma função limitada e $x - 1 \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |x| - \sqrt{x^2+\beta} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(|x| - \sqrt{x^2+\beta})(|x| + \sqrt{x^2+\beta})}{|x| + \sqrt{x^2+\beta}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - |x|^2 + \beta}{|x| + \sqrt{x^2+\beta}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\beta}{|x| + \sqrt{x^2+\beta}} = 0$$

Nota: Como estava no enuciado original ficaria apenas:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+\beta} = -\infty - \infty = -\infty$$

(c) Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) > -2$ para quaisquer $x < a$ ou $x > b$. Por outro lado, como f é contínua em $\mathbb{R}$ (e em particular em $[a, b]$), pelo teorema de Weierstrass, f tem mínimo em $[a, b]$. Seja m o mínimo de f em $[a, b]$. Como

$f(0) = -2$ e $f(x) > -2$ para qualquer $x \notin [a, b]$, $0 \in [a, b]$ logo $m \leq f(0) = -2$. Concluimos então que m é mínimo da função em todo o $\mathbb{R}$. Logo f tem mínimo absoluto.

Nota: Como estava no enuciado original, f não teria mínimo pois $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4- Caso existam, calcule os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$) das seguintes sucessões:

$$u_n = \frac{\sqrt{4^n + n}}{n^2 + 2^{n+1}}, \quad v_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}, \quad w_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n}$$

Resposta à questão 4:

u_n:

$$\lim u_n = \lim \frac{\sqrt{4^n + n}}{n^2 + 2^{n+1}} = \lim \frac{2^n \sqrt{1 + \frac{n}{4^n}}}{2^n(\frac{n^2}{2^n} + 2)} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{n}{4^n}}}{\frac{n^2}{2^n} + 2} = \frac{1}{2}$$

v_n:

$$\lim v_n = \lim \sqrt[n]{2^n + n^2} = \lim 2 \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{2^n}} = 2$$

Ou alternativamente, $v_n = \lim \sqrt[n]{a_n}$ com $a_n = 2^n + n^2$. Como

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^{n+1} + (n+1)^2}{2^n + n^2} = \lim \frac{2^n(2 + \frac{(n+1)^2}{2^n})}{2^n(1 + \frac{n^2}{2^n})} = 2$$

temos que $\lim v_n = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

w_n:

$$\lim w_n = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-3} =$$
$$= \lim \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^3 \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-3} = \left(e^{-1}\right)^3 \times 1^{-3} = e^{-3}$$

Ou alternativamente,

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{3n} = \lim \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{3n}{n+1}} = \left[\lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\lim \frac{3n}{n+1}} = \left(e^{-1}\right)^3 = e^{-3}$$

5- Calcule as derivadas das funções dadas pelas seguintes expressões:

$$f(x) = \cos x \operatorname{arctg}(2x) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\log(x^2+3)}{x}$$

Resposta à questão 5:

$$f'(x) = (\cos x \operatorname{arctg}(2x))' = (\cos x)' \operatorname{arctg}(2x) + \cos x (\operatorname{arctg}(2x))' =$$
$$= -\operatorname{sen} x \operatorname{arctg}(2x) + \cos x \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{arctg}(2x) + \frac{2\cos x}{1+4x^2}$$

$$g'(x) = \left(\frac{\log(x^2+3)}{x}\right)' = \frac{(\log(x^2+3))' x - \log(x^2+3) x'}{x^2} =$$
$$= \frac{\frac{(x^2+3)'}{x^2+3} x - \log(x^2+3)}{x^2} = \frac{\frac{2x}{x^2+3} x - \log(x^2+3)}{x^2} = \frac{2}{x^2+3} - \frac{\log(x^2+3)}{x^2}$$

6- Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(f(x)) = -x$. Mostre que f não pode ser contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Sugestão: Mostre que f é injectiva e não é monótona.

Resposta à questão 6:

Por definição, f é injectiva se $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Ora $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Leftrightarrow -a = -b \Leftrightarrow a = b$, portanto f é injectiva.

Se f fosse crescente teríamos $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow f(f(a)) \leq f(f(b)) \Leftrightarrow -a \leq -b \Leftrightarrow a \geq b$ o que é absurdo. Por outro lado, se f fosse decrescente teríamos $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \Rightarrow f(f(a)) \leq f(f(b)) \Leftrightarrow -a \leq -b \Leftrightarrow a \geq b$ o que também é absurdo. Portanto f não pode ser monótona.

Sabemos, por um corolário do teorema do valor intermédio (ou de Bolzano), que uma função contínua num intervalo é injectiva se e só se for estritamente monótona. Como f é injectiva e não é monótona em $\mathbb{R}$ concluimos que f não pode ser contínua em $\mathbb{R}$.