Resolução do exame

Cálculo Diferencial e Integral I

Versão B

Data: 8/ 2/ 2008

Grupo I

1- (a)

$$\frac{x^3+x^2-2x}{x+1}=\frac{x(x^2+x-2)}{x+1}=\frac{x(x+2)(x-1)}{x+1}$$

Cálculo auxiliar: $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=1 \text{ ou } -2$

		-2		-1		0		1	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{x(x+2)(x-1)}{x+1}$	$+$	0	$-$	ss	$+$	0	$-$	0	$+$

Portanto

$$\frac{x(x+2)(x-1)}{x+1}<0 \Leftrightarrow x\in]-2,-1[\cup]0,1[$$

(b) $A\cup B=]-2,-1[\cup[0,1]\cup\{2\}$

O conjunto dos majorantes de $A\cup B$ é $[2,+\infty[$, o conjunto dos minorantes de $A\cup B$ é $]-\infty,-2]$, o supremo de $A\cup B$ é 2, o ínfimo de $A\cup B$ é -2, o máximo de $A\cup B$ é 2 e o mínimo de $A\cup B$ não existe (pois o ínfimo não pertence a $A\cup B$).

2- f é contínua em $x=0$ sse

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{a\to 0^-} f(x)=f(0)$$

Deste modo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} - \alpha = \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left[(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right]} - \alpha = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}} - \alpha = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^2}} - \alpha$$

Fazendo uso da regra de Cauchy ($\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$) temos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{-1/2} - \alpha = f(0) = 3$$

donde tiramos $\alpha = \frac{1}{\sqrt{e}} - 3$.

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\beta x} - e^x}{x}$$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\beta x} - e^{-x}}{x}$ dá uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e como tanto o numerador como o denominador são funções diferenciáveis podemos usar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\beta x} - e^x}{x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\beta e^{\beta x} - e^x}{1} = \beta - 1 = f(0) = 3$$

donde tiramos $\beta = 4$.

3-

(a) $$(\log(x + \operatorname{sen} x))' = \frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{x + \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \cos x}{x + \operatorname{sen} x}$$

(b) $$\left(e^{\cosh x} x\right)' = \left(e^{\cosh x}\right)' x + e^{\cosh x}(x)' = \operatorname{senh}(x) e^{\cosh x} x + e^{\cosh x}$$

4- (a) g é uma função racional, i.e. uma divisão de dois polinómios que são funções contínuas e diferenciáveis, logo g é uma função contínua e diferenciável em todo o seu domínio D_g.

O seu domínio consiste nos pontos de $\mathbb{R}$ onde o denominador não se anula. Ou seja:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

pois $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

(b)

$$g'(x) = \frac{(x+2)'(x^2-2x+1) - (x+2)(x^2-2x+1)'}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{x^2-2x+1-(x+2)(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+4x+5}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{-(x-1)(x+5)}{(x-1)^4} = \frac{-x+5}{(x-1)^3}$$

x		-5		1	
g'	$-$	0	$+$	ss	$-$
g	$\searrow$	$g(-5)$	$\nearrow$	ss	$\searrow$

Portanto temos que g tem um mínimo local em $x = -5$ com valor $g(-5) = -\frac{1}{12}$.
Os intervalos de monotonia são:
$]-\infty, -5[$ onde g é decrescente,
$]-5, 1[$ onde g é crescente, e
$]1, +\infty[$ onde g é decrescente.

(c)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0+0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0+0} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

(d) Como o único mínimo local de g é menor ou igual que os limites de g quando x tende para $+\infty$, $-\infty$ ou 1, temos que $g(-5) = -\frac{1}{12}$ é mínimo absoluto de g. Por outro lado, $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$. Logo, sendo g uma função contínua em todo o $[-5, 1[$, g toma todos os valores de $-\frac{1}{12}$ a $+\infty$. Portanto o contradomínio de g é o conjunto $[-\frac{1}{12}, +\infty[$.

(e) Excluído da resolução por motivos técnicos

5-

(a) Para $n = 1$

$$\varphi(1) = -1 = 1 + (-2)^1 \text{ é verdade}$$

Hipótese de indução:

$$\varphi(n) = 1 + (-2)^n$$

Tese de indução:

$$\varphi(n) = 1 + (-2)^{n+1}$$

Dem.

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= 3 - 2\varphi(n) \\ &= 3 - 2(1 + (-2)^n) \qquad \text{por hipótese de indução} \\ &= 3 - 2 + (-2)(-2)^n \\ &= 1 + (-2)^{n+1} \end{aligned}$$

(b) Sendo φ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ temos, pelo teorema de Lagrange, que

$$\exists_{a \in]1,2[} : \varphi'(a) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2 - 1} = 1 + (-2)^2 - (-1) = 6$$

e

$$\exists_{b \in]2,3[} : \varphi'(b) = \frac{\varphi(3) - \varphi(2)}{2 - 1} = 1 + (-2)^3 - (1 + (-2)^2) = -12$$

Como φ' é uma função contínua (pois φ é uma função de classe C^1), temos, pelo teorema do valor intermédio, que φ' toma no intervalo $[a, b]$ todos os valores reais entre -12 e 6. Em particular exite $\alpha \in]a, b[$ tal que $\varphi'(\alpha) = 4$.

(c) Seja ψ uma função tal que $\psi(\frac{1}{n}) = \varphi(n)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Se ψ fosse contínua em $[0, 1]$ então existiria, pelo teorema de Weierstrass, um valor M tal que $\psi(x) \leq M$ para todo o $x \in [0, 1]$, em particular $psi(\frac{1}{2n}) = \varphi(2n) = 1 + (-2)^{2n} = 1 + 4^n \leq M$ para todo o número natural n o que seria absurdo.

Grupo II

1-

(a) $\int \operatorname{sen} x + \tan x dx = \int \operatorname{sen} x dx - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\cos x - \log(|\cos x|)$

(b)
$$\frac{2x^2-2x-8}{x^3+4x}=\frac{2x^2-2x-8}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=$$
$$=\frac{A(x^2+4)+Bx^2+Cx}{x(x^2+4)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x^3+4x}$$

de onde se tira o sistema de equações:
$$\begin{cases} A+B &= 2\\ C &= -2\\ 4A &= -8\end{cases}$$

cuja solução é $A=-2$, $B=4$ e $C=-2$.

Assim temos
$$\int\frac{2x^2-2x-8}{x^3+4x}dx=\int-\frac{2}{x}+\frac{4x}{x^2+4}-\frac{2}{x^2+4}dx=$$
$$-2\log(|x|)+2\int\frac{2x}{x^2+4}dx-\int\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx=-2\log(|x|)+2\log(x^2+4)-\arctan(\frac{x}{2})$$

(c) Primitivando por partes: $\int u'v=uv-\int uv'$ com $u'=1$ e $v=\operatorname{arcsen}x$. Portanto temos $u=x$ e $v'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Aplicando a fórmula da primitivação por partes obtemos:
$$\begin{aligned}\int\operatorname{arcsen}(x)dx &= x\operatorname{arcsen}x-\int x\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= x\operatorname{arcsen}x+\tfrac{1}{2}\int-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx\\ &= x\operatorname{arcsen}x+\tfrac{1}{2}\tfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\\ &= x\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

(d) Considerando a mudança de variável $x=\log t$ (e portanto $dx=\frac{1}{t}dt$), temos que
$$\begin{aligned}\int\tfrac{3}{1+e^x}dx &= \int\tfrac{3}{1+e^{\log t}}\tfrac{1}{t}dt\\ &= \int\tfrac{3}{(1+t)t}dt\\ &= \int\tfrac{3+3t-3t}{(1+t)t}dt\\ &= \int\tfrac{3(1+t)}{(1+t)t}-\tfrac{3t}{(1+t)t}dt\\ &= \int\tfrac{3}{t}-\tfrac{3}{1+t}dt\\ &= 3\log(t)-3\log(1+t)\\ &= 3x-3\log(1+e^x)\end{aligned}$$

2- Para $x > 0$ temos que

$$xe^{x^2} \leq xe^x \Leftrightarrow e^{x^2} \leq xe^x \Leftrightarrow x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Portanto o conjunto S está compreendido entre as curvas de equação cartesiana $y = xe^x$ (acima) e $y = xe^{x^2}$ (abaixo) para valores de x entre 0 e 1.

Deste modo a sua área será dada pelo valor do integral definido

$$\int_0^1 (xe^x - xe^{x^2})dx \overset{C.A.}{=} \left[xe^x - e - \frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = e - e - \frac{e}{2} - (0 - 1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{e}{2}$$

C.A.:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

Nota- Por motivos técnicos esta resolução não inclui um esboço de S.

3-

$$F'(x) = \frac{-3x^2 + x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax^2 - A + Bx + B + Cx^2 - 2Cx + C}{(x-1)^2(x+1)}$$

de onde se tira o sistema de equações:

$$\begin{cases} A + C & = & -3 \\ B - 2C & = & 1 \\ -A + B + C & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = -2$, $B = -1$ e $C = -1$.

Portanto

$$F'(x) = -\frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

Assim, sendo F uma primitiva de F', temos

$$F(x) = -2\log(x-1) + \frac{1}{x-1} - \log(x+1) + C$$

sendo C uma constante tal que F satisfaça a condição $F(2) = 0$. Ou seja,

$$-2\log(1) + \frac{1}{1} - \log(3) + C = 0 \Leftrightarrow C = \log(3) - 1$$

Resultado final

$$F(x) = 2\log(x+1) + \frac{1}{x+1} + \log(x-1) + \log(3) - 1$$

4-

$$(a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\operatorname{sen} x} = [e^{\operatorname{sen} x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} - e^{\operatorname{sen} 0} = e - 1$$

5- O polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 1$ da função $f(x) = x^3 - x$ é dado pela expressão:

$$p_{2,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$f(x) = x^3 - x \Rightarrow f(1) = 0$
$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 2$
$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6$

Portanto o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 1$ da função $f(x) = x^3 - x$ é

$$p_{2,1}(x) = 2(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 = 3x^2 - 4x + 1$$

6- (a) Sendo ψ uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$ (de acordo com o enunciado) temos que $\frac{e^t\sqrt{2+e^t}}{\psi(t)}$ é também uma função contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral indefinido $\int_0^x \frac{e^t\sqrt{2+e^t}}{\psi(t)} dt$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo

$$\psi(x) = e^{\int_0^x \frac{e^t\sqrt{2+e^t}}{\psi(t)} dt}$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$.

(b) Derivando ambos os termos da igualdade

$$\log(\psi(x)) = \int_0^x \frac{e^t\sqrt{2+e^t}}{\psi(t)}dt$$

(usando o Teorema Fundamental do Cálculo no segundo termo) obtemos a seguinte igualdade

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{e^x\sqrt{2+e^x}}{\psi(x)}$$

donde, tendo em conta que ψ é positiva (logo não se anula), tiramos

$$\psi'(x) = e^x\sqrt{2+e^x}$$

Portanto, $\psi(x)$ é uma primitiva de $e^x\sqrt{2+e^x}$, logo

$$\psi(x) = \frac{2}{3}(2+e^x)^{\frac{3}{2}} + c$$

sendo c uma constante.

Além disso ψ satisfaz a igualdade

$$\log(\psi(x)) = \int_0^x \frac{e^t\sqrt{2+e^t}}{\psi(t)}dt$$

donde resulta, com $x = 0$, que

$$\log(\psi(0)) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}} + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - 2\sqrt{3}$$

Resumindo, a função ψ é dada por

$$\psi(x) = \frac{2}{3}(2+e^x)^{\frac{3}{2}} + 1 - 2\sqrt{3}$$