Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE – 1º SEM. 2006/07

2ª FICHA DE EXERCÍCIOS

I. Indução Matemática

1. Demonstre por indução as relações seguintes (entre parentesis, cada relação é escrita usando o símbolo de somatório, cf. exercícios do grupo II).

(a) $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$)

(b) $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$)

(c) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$)

(d) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$)

(e) $0^3+1^3+\cdots+(n-1)^3 < n^4/4 < 1^3+2^3+\cdots+n^3$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 < n^4/4 < \sum_{k=1}^{n} k^3$)

(f) $1/\sqrt{1}+1/\sqrt{2}+\cdots+1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.
$\left(\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k} > \sqrt{n} \right)$

2. Seja $P(n)$ a proposição: n^2+3n+1 é par para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que se $P(k)$ é verdadeira para um dado $k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Critique a afirmação: "Por indução fica provado que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$".

(c) Prove que n^2+3n+1 é ímpar para todo o $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $P(n)$ a proposição: $1+2+3+\cdots+n = (2n+1)^2/8$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que se $P(k)$ é verdadeira para um dado $k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Critique a afirmação: "Por indução fica provado que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$".

(c) Modifique $P(n)$, mudando a igualdade para uma desigualdade que seja verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre a **desigualdade de Bernoulli**, i.e. $(1+x)^n \geq 1+nx$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -1$.

II. Símbolo de Somatório

Dado $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, o símbolo de somatório $\sum_{k=1}^{n} a_k$ define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \quad \text{se } n = 1\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \quad \text{se } n > 1\,.$$

Resolva os exercícios seguintes com base nesta definição.

1. Determine os valores numéricos das seguintes somas:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8}(2i-3)$; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(k-4)^2$; (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} j(j+1)(j+2)$; (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} 6$;

(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} j^{2j}$; (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(-1)^k(2k-3)$; (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n(n+1)}$.

2. Demonstre as seguintes propriedades do somatório:
(a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);
(b) $\sum_{k=1}^{n}(c\,a_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);
(c) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescópica).

3. Utilizando os resultados do Exercício I.1 e as propriedades anteriores do somatório, calcule:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{18}(k+1)$; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(2k-1)^2$; (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(k-3)^3$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(3^k - 3^{k+2}\right)$.

4. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:
(a) usando indução.
(b) observando que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e usando as propriedades do Exercício 2.

5. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer números reais $a, b \in \mathbb{R}$ é válida a igualdade

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}\,.$$

6. Mostre que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:
(a) usando indução.
(b) aplicando as propriedades do Exercício 2 a $(1 - r) \sum_{k=0}^{n} r^k$.
A que é igual a soma quando $r = 1$?
Nota: por definição, $r^0 = 1$.

7. O símbolo $n!$, designado por n-**factorial**, define-se por recorrência da seguinte forma:

$$0! = 1 \qquad \text{e} \qquad n! = n \cdot (n-1)!\,, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}\,.$$

Observe que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Dados inteiros $0 \leq k \leq n$, o **coeficiente binomial** $\binom{n}{k}$ (às vezes também representado por C_k^n) é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

(a) Mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\,.$$

Esta última fórmula é a chamada **lei do triângulo de Pascal**, permitindo o cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais.

(b) Prove por indução a **fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,, \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(c) Use a fórmula anterior para estabelecer as igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0\,, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

8. Usando a desigualdade triangular ($|x + y| \leq |x| + |y|$) e o método de indução, mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer números reais $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ é válida a desigualdade

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,.$$

III. Indução e Somatórios

Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

1. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \ .$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \ .$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1) \ .$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2 \ .$$

5. $$\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3} \ .$$

6. $$\sum_{k=1}^{n} (k-1)(3k+2) = (n-1)n(n+2) \ .$$

7. $$\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1} \ .$$

8. $$\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^{k-1} = n2^n \ .$$

9. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \ .$$

10. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} \ .$$

11. $$\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} \ .$$

12.
$$\sum_{k=1}^{n} k(3k+5) = n(n+1)(n+3) \ .$$

13.
$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)3^k = n3^{n+1} \ .$$

14.
$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)3^{k-1} = n3^n \ .$$

15.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \ .$$

16.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n} \ .$$

17.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{3^k} = 1 - \frac{n+1}{3^n} \ .$$

18.
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)2^k = (n^2+1)2^{n+1} - 2 \ .$$

19.
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)2^{k-1} = (n^2+1)2^n - 1 \ .$$

20.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2 - \frac{n^2+2}{2^n} \ .$$

21.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-3)^2}{2^k} = 3 - \frac{(n-1)^2+2}{2^n} \ .$$

22.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1 - \frac{3^n}{(n+1)!} \ .$$

23.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-3)3^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{3^n}{n!} \ .$$

IV. Funções Elementares

1) Esboce os gráficos dos polinómios $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$, assinalando de forma conveniente os seus três pontos de intersecção.

2) Esboce os gráficos dos polinómios $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$, assinalando de forma conveniente os seus dois pontos de intersecção.

3) Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$. Prove cada uma das seguintes proposições.
(a) Se $n \geq 1$ e $f(0) = 0$, então $f(x) = xg(x)$ com g um polinómio de grau $n - 1$.
(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, a função p dada por $p(x) = f(x+a)$ é também um polinómio de grau n.
(c) Se $n \geq 1$ e $f(a) = 0$ para um dado $a \in \mathbb{R}$, então $f(x) = (x - a)h(x)$ com h um polinómio de grau $n - 1$. [Sugestão: considere $p(x) = f(x + a)$.]
(d) Se $f(x) = 0$ para $(n+1)$ valores distintos de $x \in \mathbb{R}$, então $c_k = 0\,,\ k = 0, \ldots, n$, e portanto $f(x) = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
(e) Seja $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}$, com $m \geq n$. Se $g(x) = f(x)$ para $(m + 1)$ valores distintos de $x \in \mathbb{R}$, então $m = n$, $b_k = c_k\,,\ k = 0, \ldots, n$, e portanto $g(x) = f(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas.

(a) $p(0) = p(1) = p(2) = 1$
(b) $p(0) = p(1) = 1\,,\ p(2) = 2$
(c) $p(0) = p(1) = 1$
(d) $p(0) = p(1)$

5) Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(a) $p(x) = p(1 - x)$ (b) $p(x) = p(1 + x)$ (c) $p(2x) = 2p(x)$ (d) $p(3x) = p(x + 3)$

6) Considere as seguintes propriedades fundamentais das funções **seno**, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e **coseno**, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
1. $\cos(0) = \mathrm{sen}(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi) = -1$.
2. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que
$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y)\ .$$
3. Para $0 < x < \pi/2$ tem-se que
$$0 < \cos(x) < \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}\ .$$

Prove a partir delas as seguintes propriedades importantes das funções seno e coseno. [Sugestão: Apostol, Vol. I, §2.5.]
(a) $\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
(b) $\mathrm{sen}(0) = \cos(\pi/2) = \mathrm{sen}(\pi) = 0$.

(c) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(-x) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (i.e. o seno é uma função ímpar e o coseno uma função par).
(d) $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos(x)$ e $\cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(e) $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (i.e. o seno e o coseno são funções periódicas).
(f) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) , \\ \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y) . \end{aligned}$$

(g) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) , \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) . \end{aligned}$$

(h) No intervalo $[0, \pi/2]$, o seno é estritamente crescente e o coseno é estritamente decrescente.

7) Com base nas propriedades das funções seno e coseno listadas no exercício anterior, mostre que:
(a) $\operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.
(b) $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \pi/2$ com $k \in \mathbb{Z}$.
(c) $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(d) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$ e $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(e) $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
(f) $2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
(g) $2\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
(h) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\cos(x + h/2) , \\ \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\operatorname{sen}(x + h/2) . \end{aligned}$$

8) Considere as funções **seno hiperbólico**, $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e **coseno hiperbólico**, $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

Mostre que:
(a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(b) $\operatorname{senh}(0) = 0$ e $\cosh(0) = 1$.
(c) $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(-x) = \cosh(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(d) para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) \ , \\ \operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \ . \end{aligned}$$

(e) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$ e $\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(f) $\cosh(x) + \operatorname{senh}(x) = e^x$ e $\cosh(x) - \operatorname{senh}(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $f(x) = \tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}$ (b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ (c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(d) $f(x) = \log(\log x)$ (e) $f(x) = \log\left(1 + x^{3/2}\right)$ (f) $f(x) = \log\left(1 - x^{2/3}\right)$

(g) $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (h) $f(x) = \log\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$

V. Limites Elementares

1) Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2) Usando o caso notável

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ ,$$

mostre que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 2$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen} x} = 5$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{x} = 2$

(d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \cos a$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen} x} = 2$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3) Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\operatorname{sen}(t)}$ (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$ (c) $\lim\limits_{t\to \pi} \frac{\operatorname{sen}(t-\pi)}{t-\pi}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$

4) Seja $D = [0, +\infty[\setminus\{1\}$ e considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \qquad \text{para} \qquad x \in D\ .$$

Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ , \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)\ .$$

5) Calcule os limites quando $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das seguintes funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) $e^{1/x}$ (b) $\operatorname{senh}(1/x)$ (c) $\cosh(1/x)$

(d) e^{1/x^2} (e) $\operatorname{senh}(1/x^2)$ (f) $\cosh(1/x^2)$

6) Calcule os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$ (b) $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $\cos\left(\dfrac{2x+\pi}{x^2+1}\right)$ (d) $\cos\left(\dfrac{2x-\pi}{x^2+1}\right)$

(e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-\pi}{x^2+2}\right)$ (f) $\cos\left(\dfrac{x+\pi}{x^2+2}\right)$ (g) $\cos\left(\dfrac{x+\pi}{x^2+2}\right)$ (h) $\cos\left(\dfrac{x-\pi}{x^2+2}\right)$

(i) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+\pi}{x^2+4}\right)$ (j) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-\pi}{x^2+4}\right)$ (k) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2x-1}\right)$ (l) $\cos\left(\dfrac{\pi x}{x+1}\right)$

(m) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$ (n) $\cos\left(\dfrac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$

7) Calcule os limites quando $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $\log\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$ (b) $\log\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$ (c) $\log\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ (d) $\log\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$

(e) $\log\left(\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}\right)$ (f) $\log\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x}\right)$ (g) $\log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ (h) $\log\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(i) $\log\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$ (j) $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

8) Calcule os limites quando $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ (b) $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ (c) $e^{\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ (d) $e^{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}$ (e) $e^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}$

(f) $e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ (g) $e^{\frac{1-x^2}{x}}$ (h) $e^{\frac{x^2}{1+x}}$ (i) $e^{\frac{x^2}{1+x^2}}$ (j) $e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$