Análise Matemática IV

Problemas de Análise Complexa

Semana 1

1. Escreva os seguintes números complexos na forma $a + bi$ e represente-os geometricamente no plano de Argand:

   a) $(2+i)(1-i)$

   b) $\frac{1}{1-i}$

   c) $\frac{2+i}{1+i}$

   d) $(2-3i)^2$.

   e) $\overline{(1-2i)^3}$

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os geometricamente:

   a) 3

   b) -2

   c) $1+i$

   d) $3-4i$

   e) $-1-i$

3. Calcule e represente geometricamente os números complexos

   a) $\sqrt[3]{i}$

   b) $\sqrt[4]{-1}$

   c) $\sqrt{1-i}$

   d) $\sqrt[4]{z^6}$

   e) $(\sqrt[4]{z})^6$
   (Compare os resultados desta alínea com os da alínea anterior. Tente determinar em que casos é que $\sqrt[n]{z^m}$ e $(\sqrt[n]{z})^m$ representam os mesmos complexos.)

4. Mostre as seguintes desigualdades e indique em que condições as igualdades são satisfeitas

   a) $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

b) $|z+w| \leqslant |z|+|w|$
c) $|z+w| \geqslant ||z|-|w||$
d) $|z-|z|| \leqslant |z| \cdot |\arg z|$

5. Esboce no plano complexo os conjuntos dos números que satisfazem as relações seguintes

   a) $|z-2|=3$
   b) $|z-2|+|z+2|=5$
   c) $|z-1|-|z+1|>2$
   d) $|z|=\mathrm{Re}(z)+2$
   e) $\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z)<1$
   f) $\mathrm{Im}(\frac{z-i}{z-1})=0$
   g) $\mathrm{Re}(\frac{z-1}{z-i})=0$

6. Determine todos os vértices de um polígono regular de n lados, centrado na origem, sabendo que um deles é representado pelo complexo z_1.

7. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1+z_2+z_3=0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triangulo equilatero.

8. Considere n complexos não nulos, $z_1, \ldots, z_n$, todos do mesmo lado de uma dada recta r que passa pela origem. Mostre que os complexos $z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}$ também estão todos do mesmo lado de uma recta (qual?) e que se tem $z_1+\ldots+z_n \neq 0$ e $z_1^{-1}+\ldots+z_n^{-1} \neq 0$. (Sugestão: considere primeiro o caso de r ser o eixo imaginário $\mathrm{Re}(z)=0$.)