Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

21 de Fevereiro de 2003

Semana 2

1. Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada:

   (a) $xy - ix$ (b) $e^{xy} - e^{-xy} + ixy$ (c) $z^2 - 3z$ (d) $\dfrac{1}{z-i}$ (e) $z - \bar{z}$

   (f) $\overline{e^z}$ (g) $e^{2z} - e^{-z}$ (h) ze^{iz} (i) $\mathrm{Im}(z^2)$.

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$.

   (a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

   (b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

3. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = |z|^2 - \frac{\bar{z}^2}{2}$. Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde f admite derivada e calcule $f'(z)$ nesses pontos. Qual a região de analiticidade de f?

4. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x,y) = (0,0)$.

   (b) Verifique, utilizando a definição, que $f'(0)$ não existe.

5. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras, então f é constante.

6. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

   a) $\cos(iz) = \cosh(z)$; b) $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh} z$;

   c) $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh^2 y + \operatorname{senh}^2 y$; d) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$;

   e) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$; f) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cdot \cosh y + i\cos x \cdot \operatorname{senh} y$.

7. Mostre, utilizando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar, que a função $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma função inteira, e mostre que $f'(z) = nz^{n-1}$.

8. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

$$\text{a) } \log(-1); \qquad \text{b) } \log\frac{1-i}{\sqrt{2}}; \qquad \text{c) } i^i; \qquad \text{d) } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}.$$

9. Determine todas as soluções das seguintes equações:

$$\text{a) } e^z = 2 \qquad \text{b) } e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0 \qquad \text{c) } \log z = 1 + 2\pi i \qquad \text{d) } \operatorname{sen}(2z) = 5$$

10. Definindo

$$w = \arcsin z \qquad \text{sse} \qquad \operatorname{sen} w = z$$

mostre que

$$\arcsin z = -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$