# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

7 de Abril de 2003

## Semana 2

1. Use as equações de cauchy-Riemann para determinar o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada e calcule a derivada nesses pontos:

(a) $xy - ix$ (b) $e^{xy} - e^{-xy} + ixy$ (c) $z^2 - 3z$ (d) $\dfrac{1}{z-i}$ (e) $z - \bar{z}$

(f) $\overline{e^z}$ (g) $e^{2z} - e^{-z}$ (h) $ze^{iz}$ (i) $\mathrm{Im}(z^2)$.

**Resolução:**

**(a)** Sendo $f(x+iy) = xy - ix$, verifica-se que

$$\mathrm{Re}f \equiv u(x,y) = xy \quad , \quad \mathrm{Im}f \equiv v(x,y) = -x$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas, $f$ será diferenciável no conjunto de pontos onde se verifiquem as condições de Cauchy-Riemann. Tem-se então que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

pelo que $f$ é diferenciável apenas no ponto $z = 1 + i0$, e

$$f'(1+0i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = -i$$

**(b)** Sendo $f(x+iy) = e^{xy} - e^{-xy} + ixy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re}f \equiv u(x,y) = e^{xy} - e^{-xy} \quad , \quad \mathrm{Im}f \equiv v(x,y) = xy$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} + ye^{-xy} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} + xe^{-xy} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

Atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas, $f$ será diferenciável no conjunto de pontos onde se verifiquem as condições de Cauchy-Riemann. Tem-se então que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ye^{xy} + ye^{-xy} = x \\ xe^{xy} + xe^{-xy} = -y \end{cases}$$

Obviamente que o sistema é verificado por $(x,y)=(0,0)$. Para $x\neq 0$ e $y\neq 0$, tem-se que

$$e^{xy}+e^{-xy}=\frac{x}{y} \quad \text{e} \quad e^{xy}+e^{-xy}=-\frac{y}{x}$$

e combinando apropriadamente as duas equações obtem-se $x^2=-y^2$, que é uma equação impossível dado que $x$ e $y$ são reais diferentes de 0. Conclui-se que $f$ é diferenciável apenas no ponto $z=0$, e

$$f'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=0$$

**(c)** Sendo $f(z)=z^2-3z=(x+iy)^2-3(x+iy)=x^2-y^2-3x+i(2xy-3y)$, verifica-se que

$$\mathrm{Re}f\equiv u(x,y)=x^2-y^2-3x \quad , \quad \mathrm{Im}f\equiv v(x,y)=2xy-3y$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x-3$$

É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann são verificadas para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas, $f$ é diferenciável em $\mathbb{C}$, e

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=2x-3+i2y=2z-3$$

para todo $z\in\mathbb{C}$.

**(d)** Sendo $f(z)=\dfrac{1}{z-i}=\dfrac{1}{x+i(y-1)}=\dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}+i\dfrac{1-y}{x^2+(y-1)^2}$, verifica-se que

$$\mathrm{Re}f\equiv u(x,y)=\frac{x}{x^2+(y-1)^2} \quad , \quad \mathrm{Im}f\equiv v(x,y)=\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}$$

que por serem funções racionais são diferenciáveis em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ excepto os zeros do denominador, isto é, estão bem definidas em $\mathbb{R}^2\setminus(0,1)$. Para $(x,y)\neq(0,1)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(y-1)^2-x^2}{(x^2+(y-1)^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2x(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{-2x(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{(y-1)^2-x^2}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann se verificam para todo $(x,y)\neq(0,1)$, e dado que as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas em $\mathbb{R}^2\setminus(0,-1)$, $f$ é diferenciável em $\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Para $z\neq i$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{(y-1)^2-x^2}{(x^2+(y-1)^2)^2}+i\frac{2x(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

Dado que

$$(x^2+(y-1)^2)^2=(x+i(y-1))^2(x-i(y-1))^2=(z-i)^2(x^2-(y-1)^2-2x(y-1)i)$$

conclui-se

$$f'(z)=-\frac{1}{(z-i)^2}$$

**(e)** Sendo $f(z)=z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=2iy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re}f\equiv u(x,y)=0 \quad , \quad \mathrm{Im}f\equiv v(x,y)=2y$$

como tal, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2$$

Dado que, a condição $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ não se verfica para nenhum $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, o domínio de diferenciabilidade de $f$ é o conjunto vazio.

**(f)** Sendo $f(z)=\overline{e^z}=\overline{e^x\cos y+ie^x\operatorname{sen} y}=e^x\cos y-ie^x\operatorname{sen} y$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f\equiv u(x,y)=e^x\cos y \quad , \quad \mathrm{Im} f\equiv v(x,y)=-e^x\operatorname{sen} y$$

como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\operatorname{sen} y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\operatorname{sen} y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\cos y$$

Para que se verifiquem as condições de Cauchy- Riemann

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}e^x\cos y=-e^x\cos y\\ -e^x\operatorname{sen} y=e^x\operatorname{sen} y\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\cos y=0\\ \operatorname{sen} y=0\end{cases}$$

Atendendo a que as funções seno e coseno nunca se anulam simultâneamente, tem-se que o domínio de diferenciabilidade é o conjunto vazio.

**(g)** Sendo $f(z)=e^{2z}-e^{-z}=e^{2(x+iy)}-e^{-(x+iy)}=e^{2x}\cos(2y)-e^{-x}\cos y+i(e^{2x}\operatorname{sen}(2y)+e^{-x}\operatorname{sen} y)$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f\equiv u(x,y)=e^{2x}\cos(2y)-e^{-x}\cos y \quad , \quad \mathrm{Im} f\equiv v(x,y)=e^{2x}\operatorname{sen}(2y)+e^{-x}\operatorname{sen} y$$

como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x}= 2e^{2x}\cos(2y)+e^{-x}\cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\operatorname{sen}(2y)+e^{-x}\operatorname{sen} y$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\operatorname{sen}(2y)-e^{-x}\operatorname{sen} y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos(2y)+e^{-x}\cos y$$

É óbvio que as condições de Cauchy- Riemann se verificam para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e dado que as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, conclui-se que $f$ é diferenciável em $\mathbb{C}$, e

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)= 2e^{2x}\cos(2y)+e^{-x}\cos y+i(2e^{2x}\operatorname{sen}(2y)-e^{-x}\operatorname{sen} y)=2e^{2z}+e^{-z}$$

para todo $z\in\mathbb{C}$

**(h)** Sendo $f(z)=ze^{iz}=(x+iy)e^{i(x+iy)}=e^{-y}(x\cos(x)-y\operatorname{sen} x)+ie^{-y}(x\operatorname{sen}(x)+y\cos x)$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f\equiv u(x,y)=e^{-y}(x\cos(x)-y\operatorname{sen} x) \quad , \quad \mathrm{Im} f\equiv v(x,y)=e^{-y}(x\operatorname{sen}(x)+y\cos x)$$

como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-y}((1-y)\cos(x)-x\operatorname{sen} x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{-y}((y-1)\operatorname{sen}(x)-x\cos x)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-y}((1-y)\operatorname{sen}(x)+x\cos x) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{-y}((1-y)\cos(x)-x\operatorname{sen} x)$$

É óbvio que as condições de Cauchy- Riemann se verificam para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e dado que as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, conclui-se que $f$ é diferenciável em $\mathbb{C}$, e

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\
&= e^{-y}((1-y)\cos(x)-x\mathrm{sen}x)+ie^{-y}((1-y)\mathrm{sen}\,(x)+x\cos x)\\
&= e^{-y}(1-y)(\cos x+i\mathrm{sen}\,x)+e^{-y}(-\mathrm{sen}\,x+i\cos x)\\
&= e^{-y}(1-y)e^{ix}+ie^{-y}xe^{ix}\\
&= e^{iz}(1+iz)
\end{aligned}$$

para todo $z\in\mathbb{C}$

**(i)** Sendo $f(z)=\mathrm{Im}z^2=\mathrm{Im}(x^2-y^2+i2xy)=2xy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re}f\equiv u(x,y)=2xy \quad , \quad \mathrm{Im}f\equiv v(x,y)=0$$

como tal, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

É imediato verificar que as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, e que as equações de Cauchy Riemann se verificam apenas no ponto $(0,0)$, pelo que a função admite derivada apenas em $z=0$, e

$$f'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=0$$

2. Considere a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=f(x+iy)=x^2-y^2+2i|xy|$.

   (a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

   (b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde $f$ é analítica.

   **Resolução:**

   **(a)** Começemos por estudar o domínio de diferenciabilidade de $f$. Podemos escrever

$$f(z)=f(x+iy)=\begin{cases} x^2-y^2+2xyi & \text{se } xy\geq 0\\ x^2-y^2-2xyi & \text{se } xy<0\end{cases}$$

pelo que, se $xy\geq 0$

$$u(x,y)\equiv\mathrm{Re}f(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad v(x,y)\equiv\mathrm{Im}f(x,y)=2xy$$

e se $xy<0$

$$u(x,y)\equiv\mathrm{Re}f(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad v(x,y)\equiv\mathrm{Im}f(x,y)=-2xy$$

Temos então que se $xy\geq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

e as condições de Cauchy-Riemann verificam-se para todo $(x,y)$ tais que $xy\geq 0$. Dado que as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas na mesma região, conclui-se que $f$ é diferenciável em $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Imz}\geq 0\}$. Para $z$ nesta região

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=2x+i2y=2z$$

No caso em que $xy < 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

e as condições de Cauchy- Riemann não se verificam nesta região, pelo que $f$ não admite derivada no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z \cdot \mathrm{Im}z < 0\}$.

**(b)** Para que $f$ seja analítica num dado ponto de $\mathbb{C}$ é necessário que: exista uma vizinhança de $z$, $U$, onde $f'(w)$ exista para todo $w \in U$. Tem-se então que o domínio de analiticidade de $f$ é a região $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z \cdot \mathrm{Im}z > 0\}$.

3. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = |z|^2 - \frac{\bar{z}^2}{2}$. Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde $f$ admite derivada e calcule $f'(z)$ nesses pontos. Qual a região de analiticidade de $f$?

**Resolução:**

Sendo $f(z) = f(x+iy) = |x+iy|^2 - \frac{(x-iy)^2}{2} = x^2 + y^2 - \frac{x^2-y^2}{2} + ixy$ tem-se que

$$u(x,y) \equiv \mathrm{Re}f(x,y) = \frac{x^2+3y^2}{2} \quad , \quad v(x,y) \equiv \mathrm{Im}f(x,y) = xy$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

As condições de Cauchy Riemann verificam-se no caso em que $3y = -y$, isto é se $y = 0$. Dado que as derivadas parciais de $u$ e $v$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, conclui-se que $f$ admite derivada na região $\{z \in \mathbb{C} : z = x \in \mathbb{R}\}$. Nesta região

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,0) = x = z$$

Finalmente, atendendo a que a vizinhança de qualquer ponto desta região contem pontos onde não existe derivada, o domínio de analiticidade de $f$ é vazio.

4. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x,y) = (0,0)$.

(b) Verifique, utilizando a definição, que $f'(0)$ não existe.

**Resolução:**

**(a)** Atendendo à definição de $f$, podemos escrever

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad v(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tem-se então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = -1$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = 1,$$

É então óbvio que as condições de Cauchy-Riemann se verificam em $(x,y)=(0,0)$.

**(b)** Por definição

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}{x+iy}$$

Fazendo $z$ convergir para 0 no eixo real (o que significa $x\to 0$ e $y=0$), obtem-se

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x+ix}{x}=1+i$$

enquanto que, fazendo $z$ convergir para 0 na recta $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}z=\mathrm{Im}x\}$ (o que significa $x\to 0$ e $y=x$), obtem-se

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{ix}{x+ix}=\frac{i}{1+i}=\frac{1+i}{2}$$

Como $1+i\neq\frac{1+i}{2}$ conclui-se que o limite não existe e consequentemente $f$ não admite derivada em $z=0$.

5. Mostre que se $f$ e $\overline{f}$ são ambas inteiras, então $f$ é constante.

**Resolução:**

Se $f(z)=f(x+iy)\equiv u(x,y)+iv(x,y)$ tem-se que $\overline{f}(z)=u(x,y)-iv(x,y)$. Dado que $f$ é inteira, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\quad\text{e}\quad\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Por outro lado, dado que $\overline{f}$ é inteira, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\quad\text{e}\quad\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Combinando as igualdades adequadamente conclui-se que

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big)=(0,0)\quad,\quad\Big(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\Big)=(0,0)$$

donde $u$ e $v$ terão que ser constantes e consequentemente $f$ é constante.

6. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z=x+iy$):

a) $\cos(iz)=\cosh(z)$; b) $\operatorname{sen}(iz)=i\operatorname{senh}z$;

c) $|\cos z|^2+|\operatorname{sen}z|^2=\cosh^2 y+\operatorname{senh}^2 y$; d) $\cos^2 z+\operatorname{sen}^2 z=1$;

e) $\operatorname{sen}(z+w)=\operatorname{sen}z\cdot\cos w+\cos z\cdot\operatorname{sen}w$;

f) $\operatorname{sen}z=\operatorname{sen}x\cdot\cosh y+i\cos x\cdot\operatorname{senh}y$

**Resolução:**

**(a)** Utilizando a definição de coseno complexo

$$\cos(iz)=\frac{e^{i(iz)}+e^{-i(iz)}}{2}=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\cosh z$$

**(b)** De modo análogo

$$\operatorname{sen}(iz)=\frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i}=-i\frac{e^{-z}-e^{z}}{2}=i\operatorname{senh}z$$

**(c)** Fazendo $z = x + iy$ obtemos

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy)$$

e pelas alíneas a) e b)

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

De igual forma

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 &= (\cos x \cosh y)^2 + (\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y)^2 + (\operatorname{sen} x \cosh y)^2 + (\cos x \operatorname{senh} y)^2 \\ &= \cosh^2 y + \operatorname{senh}^2 y \end{aligned}$$

**(d)** Mais uma vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} + \frac{1}{i^2}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})\right) = 1$$

**(e)**

$$\operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{i(-z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} + \frac{e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} + e^{i(-z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} = \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z+w) \end{aligned}$$

7. Mostre, utilizando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar, que a função $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma função inteira, e mostre que $f'(z) = nz^{n-1}$.

**Resolução:**

Utilizando a representação trigonométrica, se $z = \rho e^{i\theta}$, então $f(z) = f(\rho e^{i\theta}) = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n \cos(n\theta) + i\rho^n \operatorname{sen}(n\theta)$, e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = n\rho^{n-1}\cos(n\theta) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -n\rho^n \operatorname{sen}(n\theta)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = n\rho^{n-1}\operatorname{sen}(n\theta) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = n\rho^n \cos(n\theta)$$

Tem-se então que

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}$$

para todos $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Dado que as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho}$, $\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}$ e $\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ são contínuas em $]0,\infty[\times[0,2\pi]$ e têm o mesmo valor em $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, conclui-se que $z^n$, $n \in \mathbb{N}$, é uma função analítica para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Como é contínua em $z = 0$, podemos concluir que tambem é analítica neste ponto, sendo portanto uma função inteira. Para $z \in C$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + i(\frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x})$$

Atendendo a que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} f'(z) &= n\rho^{n-1}\Big(\cos(n\theta)\cos\theta + \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta - i(\operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta - \cos(n\theta)\operatorname{sen}\theta)\Big) \\ &= n\rho^{n-1}\Big(\cos(n-1)\theta + i\operatorname{sen}(n-1)\theta\Big) \\ &= n\rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta} = nz^{n-1} \end{aligned}$$

8. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

$$\text{a) } \log(-1); \qquad \text{b) } \log\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}; \qquad \text{c) } i^i; \qquad \text{d) } \left(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}.$$

**Resolução:**

**(a)** $\log(-1) = \log(1e^{i\pi}) = \log 1 + i\pi = i\pi$

**(b)** $\log\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = \log(e^{-i\frac{\pi}{4}}) = -i\dfrac{\pi}{4}$

**(c)** $i^i = e^{\log(i^i)} = e^{i\log i} = e^{i\log(1e^{i\frac{\pi}{2}})} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\pi/2}$

**(d)** $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{(1+i)\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}})} = e^{(1+i)i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}(1+i)$

9. Determine todas as soluções das seguintes equações:

$$\text{a) } e^z = 2 \qquad \text{b) } e^{iz}+e^{-iz}+2=0 \qquad \text{c) } \log z = 1+2\pi i \qquad \text{d) } \operatorname{sen}(2z) = 5$$

**Resolução:**

**(a)** $e^z = 2 \;\Leftrightarrow\; z = \log 2 + 2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$.

**(b)** Multiplicando todos os termos por $e^{iz}$, obtem-se

$$\begin{aligned} e^{2iz}+2e^{iz}+1=0 \;&\Leftrightarrow\; (e^{iz}+1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} = -1 \\ &\Leftrightarrow\; z = \frac{1}{i}\log(-1) = -i(i\pi(2k+1)) = (2k+1)\pi \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

**(c)** $\log z = 1+2\pi i \;\Rightarrow\; z = e^{1+2\pi i} = e$

**Nota:** $\log e = 1+2\pi i$, apenas com uma escolha adequada do ramo do logaritmo.

**(d)** Pela definição de seno

$$\operatorname{sen}(2z) = 5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i} = 5$$

e multiplicando todos os termos da equação por $e^{2iz}$

$$e^{4iz} - 10ie^{2iz} - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{2iz} = \frac{10i \pm \sqrt{-96}}{2} = (5 \pm 2\sqrt{6})i$$

Então

$$2iz = \log((5\pm 2\sqrt{6})i) + 2k\pi i \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Finalmente, dado que $5\pm 2\sqrt{6}$ são ambos positivos,

$$z = \frac{-i}{2}\left(\log(5\pm 2\sqrt{6}) + i\frac{\pi}{2}\right) + k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

ou seja

$$z = \frac{\pi}{4} + k\pi - \frac{i}{2}\Big(\log(5\pm 2\sqrt{6}) \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

10. Definindo

$$w = \arcsin z \qquad \text{sse} \qquad \operatorname{sen} w = z$$

mostre que

$$\arcsin z = -i\log(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

**Resolução:**

Por definição se $w = \arcsin z$ então $z = \operatorname{sen} w$, pelo que

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \ \Leftrightarrow\ e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0$$

Multiplicando todos os termos da equação por $e^{iw}$ obtem-se

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

pelo que

$$e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{(2iz)^2+4}}{2} = \frac{2iz + \sqrt{-4z^2+4}}{2} = iz + \sqrt{1-z^2}$$

donde

$$iw = \log(iz + \sqrt{1-z^2})$$

Note-se que neste raciocínio, $\sqrt{1-z^2}$ pode tomar um de dois valores que diferem entre si por um factor de -1; da mesma forma o logaritmo pode tomar infinitos valores que diferem entre si pela soma de um múltiplo de $2\pi i$. Definindo adequadamente o ramo da função raíz quadrada e da função logaritmo obtemos um ramo da função arcsen.