Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 3

1. Utilizando a desigualdade
$$\left|\int_a^b w(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|\,dt,$$
onde $a \leq b$ mostre que para qualquer ponto x no intervalo fechado $[-1,1]$ o polinómio de Legendre $P_n(x)$ dado por
$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta \qquad n = 0,1,2,\ldots$$
satisfaz a desigualdade $|P_n(x) \leq 1$.

2. Calcule
$$\int_\gamma x\,dz,$$
onde γ é a curva:
   (a) $\gamma(t) = t(1+i)$, $0 \leq t \leq 1$,
   (b) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t)(1+i)$, $0 \leq t \leq \pi/2$,
   (c) $\gamma(t) = \frac{1+i}{2} + \frac{e^{it}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$.

3. Seja
$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \qquad |z| > 0 \text{ e } 0 < \arg z < 2\pi.$$
Calcule
$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz,$$
onde a curva é percorrida no sentido positivo.

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então
$$\left|\int_\gamma \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz\right| \leq \pi\frac{R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}.$$

5. Considere a função
$$y(t) = \begin{cases} t^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $\gamma(t) = t + iy(t)$ para $0 \leq t \leq 1$ é uma curva regular.

(b) Calcule

$$\int_\gamma dz \quad \text{e} \quad \int_\gamma e^{\pi z}\, dz.$$

6. Designa-se por R a região $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } \arg z \neq \pi\}$. Portanto $R = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \geq 0\}$.

(a) Mostre que se $\gamma, \sigma : [0,1] \to R$ são caminhos regulares tais que $\gamma(0) = \sigma(0)$ e $\gamma(1) = \sigma(1)$ então

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\sigma \frac{dz}{z}.$$

(b) Mostre que a função $f : R \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z},$$

onde $\gamma_z : [0,1] \to R$ é qualquer caninho regular tal que $\gamma_z(0) = 1$ e $\gamma_z(1) = z$ é bem definida.

(c) Mostre que $f(z)$ é analítica e calcule $f'(z)$.

7. Seja C um contorno fechado simples com orientação postiva. Mostre que a área no interior de C pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2i} \int_C \bar{z}\, dz.$$

Sugestão: Utilize o teorem de Green.