Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 3

1. Utilizando a desigualdade
$$\left|\int_a^b w(t)\,dt\right| \le \int_a^b |w(t)|\,dt,$$
onde $a \le b$ mostre que para qualquer ponto x no intervalo fechado $[-1,1]$ o polinómio de Legendre $P_n(x)$ dado por
$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta \qquad n = 0,1,2,\ldots$$
satisfaz a desigualdade $|P_n(x)| \le 1$.

Resolução. Tem-se
$$\begin{aligned}
|P_n(x)| &\le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^n d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x^2 + (1-x^2)\cos^2\theta\right)^{\frac{n}{2}} d\theta \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x^2 + (1-x^2)\right)^{\frac{n}{2}} d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Calcule
$$\int_\gamma x\,dz,$$
onde γ é a curva:

   (a) $\gamma(t) = t(1+i)$, $0 \le t \le 1$,

   (b) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t)(1+i)$, $0 \le t \le \pi/2$,

   (c) $\gamma(t) = \frac{1+i}{2} + \frac{e^{it}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4}$.

Resolução. Tem-se $x = (z+\bar{z})/2$. Seja $\gamma : [t_i, t_f] \to \mathbb{C}$ a curva de a), b) ou c), e seja $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x\,dz &= \frac{1}{2}\left(\int_\gamma z\,dz + \int_\gamma \bar{z}\,dz\right) \\
&= \left.\frac{z^2}{4}\right|_{\gamma(t_i)}^{\gamma(t_f)} + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} (x(t) - iy(t))\left(x'(t) + iy'(t)\right)\,dt \\
&= \frac{\gamma(t_f)^2 - \gamma(t_i)^2}{4} + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f}\left(x(t)x'(t) + y(t)y'(t)\right)\,dt + \frac{i}{2}\int_{t_i}^{t_f}\left(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right)\,dt \\
&= \frac{\gamma(t_f)^2 - \gamma(t_i)^2}{4} + \int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)\,dt + \frac{i}{2}\int_{t_i}^{t_f}\left(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right)\,dt \\
&= \frac{\gamma(t_f)^2 - \gamma(t_i)^2}{4} + \frac{|\gamma(t_f)|^2 - |\gamma(t_i)|^2}{4} + \frac{i}{2}\int_{t_i}^{t_f}\left(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right)\,dt.
\end{aligned}$$

(a) Para $\gamma(t) = t(1+i) = t + it$, $0 \le t \le 1$, tem-se $x(t)y'(t) - y(t)x(t) = t - t = 0$ e

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x\,dz &= \frac{\gamma(1+i)^2}{4} + \frac{|1+i|^2}{4} \\
&= \frac{i2}{4} + \frac{2}{4} \\
&= \frac{1+i}{2},
\end{aligned}$$

(b) Para $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t)(1+i) = \operatorname{sen} t + i \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi/2$, tem-se $x(t)y'(t) - y(t)x(t) = (\operatorname{sen} t)(\cos t) - (\operatorname{sen} t)(\cos t) = 0$. Logo

$$\int_\gamma x\,dz = \frac{1+i}{2}$$

(c) Para $\gamma(t) = \frac{1+i}{2} + \frac{e^{it}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4}$, tem-se

$$\begin{aligned}
x(t)y'(t) - y(t)x'(t) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos t + \operatorname{sen} t) + \frac{1}{2}\left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos t + \operatorname{sen} t) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma(\pi/4) = 1 + i$ e $\gamma(5\pi/4) = 0$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma x\,dz, &= -\frac{1+i}{2} + \frac{i}{2}\int_{t_i}^{t_f} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt \\
&= -\frac{1+i}{2} + \frac{i}{2}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos t + \operatorname{sen} t) + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= -\frac{1+i}{2} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{sen} t - \cos t)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + \frac{1}{2}\pi\right) \\
&= -\frac{1+i}{2} + i\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\pi-2}{4}
\end{aligned}
$$

3. Seja

$$
f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \qquad |z| > 0 \text{ e } 0 < \arg z < 2\pi.
$$

Calcule

$$
\oint_{|z|=1} f(z)\,dz,
$$

onde a curva é percorrida no sentido positivo.

Resolução. Seja $\gamma(t) = e^{it}$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} f(z)\,dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \exp[(-1+i)\log\gamma(t)]\gamma'(t)\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \exp[(-1+i)it]ie^{it}\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} i\exp[(-1+i)it + it]\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} i\exp[-t]\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(-ie^{-t})\Big|_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \\
&= i(1 - e^{-2\pi})
\end{aligned}
$$

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \le t \le \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$
\left|\int_\gamma \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz\right| \le \pi\frac{R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}.
$$

Resolução. Tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{2R^2e^{i2t}-1}{R^4e^{i4t}+5R^2e^{i2t}+4} Rie^{it}\,dt\right| \\
&\leq \int_0^\pi \frac{|2R^2e^{i2t}-1|}{|R^4e^{i4t}+5R^2e^{i2t}+4|}|Rie^{it}|\,dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{|2R^2e^{i2t}|+|-1|}{|(R^2e^{i2t}-1)(R^2e^{i2t}-4)|}R\,dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{(2R^2+1)R}{||R^2e^{i2t}|-|-1||)(||R^2e^{i2t}|-|-4||}\,dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{(2R^2+1)R}{(R^2-1)(R^2-4)}\,dt \qquad\qquad \text{se } R>2 \\
&= \frac{(2R^2+1)R}{(R^2-1)(R^2-4)}\int_0^\pi dt \\
&= \pi\frac{(2R^2+1)R}{(R^2-1)(R^2-4)}
\end{aligned}$$

5. Considere a função

$$y(t) = \begin{cases} t^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right) & 0<t\leq 1 \\ 0 & t=0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $\gamma(t) = t + iy(t)$ para $0 \leq t \leq 1$ é uma curva regular.

(b) Calcule

$$\int_\gamma dz \quad \text{e} \quad \int_\gamma e^{\pi z}\,dz.$$

Resolução.

(a) Para mostar que γ é contínua no intervalo $[0,1]$ tem-se de mostar

$$\lim_{t\to 0} y(t) = 0. \tag{1}$$

Para $0 < t \leq 1$ tem-se $|y(t)| = |t^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)| \leq t^3$. Portanto $y(t)$ é limitado, e como $\lim_{t\to 0} t^3 = 0$ obtém-se (1). Logo γ é contínua. Para acabar tem de mostar que $\gamma'(t)$ é contínua e não nula. Tem-se, para $0<t\leq 1$

$$\gamma'(t) = 1 + i\left(3t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right) - t\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right) \neq 0$$

Por definição

$$y'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)$$

Como $|t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)| \leq t^2$ e

$$\left|3t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right) - t\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right| \leq 3t^2 + |t|,$$

segue-se que $y'(0) = 0 = \lim_{t\to 0^+} y'(t)$. Portanto γ é uma curva regular.

(b) Como as funções $f(z) = 1$ e $g(z) = e^{\pi z}$ são analíticas no plano complexo,

$$\begin{aligned}\int_\gamma dz &= \gamma(1) - \gamma(0) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\int_\gamma e^{\pi z}\, dz &= \frac{e^{\pi\gamma(1)} - e^{\pi\gamma(0)}}{\pi} \\ &= \frac{e^{\pi} - e^{0}}{\pi} \\ &= \frac{e^{\pi} - 1}{\pi}\end{aligned}$$

6. Designa-se por R a região $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } \arg z \neq \pi\}$. Portanto $R = \mathbb{C} \setminus \{x : x \leq 0\}$.

(a) Mostre que se $\gamma, \sigma : [0,1] \to R$ são caminhos regulares tais que $\gamma(0) = \sigma(0)$ e $\gamma(1) = \sigma(1)$ então

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\sigma \frac{dz}{z}.$$

(b) Mostre que a função $f : R \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z},$$

onde $\gamma_z : [0,1] \to R$ é qualquer caminho regular tal que $\gamma_z(0) = 1$ e $\gamma_z(1) = z$ é bem definida.

(c) Mostre que $f(z)$ é analítica e calcule $f'(z)$.

Resolução.

(a) Como $\frac{1}{z}$ é analítica em R e para qualquer contorno simples e fechado Γ em R o interior de Γ pertence a R, o teorema de Cauchy-Goursat implique que $\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 0$. Para

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma \frac{dz}{z} \\ &= \int_{\gamma-\sigma} \frac{dz}{z} \\ &= \int_\gamma \frac{dz}{z} - \int_\sigma \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

(b) Aplicando (a) se obtém que se γ_z e σ_z são caminhos regulares em R tais que $\gamma_z(0) = 1 = \sigma_z(0)$ e $\gamma_z(1) = z = \sigma_z(1)$ então

$$\int_{\gamma_z} \frac{dz}{z} = \int_{\sigma_z} \frac{dz}{z}.$$

Logo f é bem definida.

(c) Por definição tem-se

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{z+h}} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z}\right)
\end{aligned}
$$

Nota-se que se $|h|$ é suficientemente pequeno, então $\gamma(t) = z + th \in R$ para $0 \le t \le 1$ e

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{z+h}} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\gamma} \frac{dz}{z} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{h}{z+th}dt \\
&= \lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{dt}{z+th}
\end{aligned}
$$

Seja $h \in \mathbb{C}$ tal que $|h| < |z|$ e $z + th \in R$ para $0 \le t \le 1$. Então

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{z} - \int_0^1 \frac{dt}{z+th}\right| &= \left|\int_0^1 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+th}\right) dt\right| \\
&\le \int_0^1 \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z+th}\right| dt \\
&= \int_0^1 \left|\frac{z+th-z}{(z+th)z}\right| dt \\
&= \int_0^1 \frac{t|h|}{|z+th||z|} dt \\
&\le \int_0^1 \frac{t|h|}{(|z|-|h|)|z|} dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{|h|}{(|z|-|h|)|z|}
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\frac{1}{z} = \lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{dt}{z+th},
$$

e portanto

$$
\frac{1}{z} = \lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{dt}{z+th} = f'(z).
$$

7. Seja C um contorno fechado simples com orientação postiva. Mostre que a área no interior de C pode ser escrita na forma

$$
\frac{1}{2i}\int_C \bar{z}\, dz.
$$

Sugestão: Utilize o teorema de Green.

Resolução. Seja $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ uma parametrização regular de C com $a \leq t \leq b$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\int_C \bar{z}\,dz &= \frac{1}{2i}\int_a^b (x(t) - iy(t))\left(x'(t) + iy'(t)\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_a^b (xx' + yy')dt + +i\int_a^b (xy' - yx')dt\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\Bigg|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} + i\int_C -ydx + xdy\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(0 + i\int_R (1+1)dxdy\right) \qquad \gamma(a) = \gamma(b) \\
&\int_R dxdy,
\end{aligned}
$$

onde R é a região interior de C.