Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

21 de Março de 2003

Semana 4

1. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z-i|+|z-2i|=2$, percorrida no sentido positivo. Calcule

   (a) $\oint_\Gamma z^5\, e^{z^2\cos^2 z}\, dz$

   (b) $\oint_\Gamma \frac{z^5\, e^{z^2\cos^2 z}}{2z-i\pi}\, dz$

   (c) $\oint_\Gamma \frac{1}{z^2(z-i)^3}\, dz.$

   (d) $\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i)^{11}}\, dz$.

2. Considere a função complexa definida por

$$f(z)=f(x+iy)=x^2-y^2-2xy+2y+i\left(x^2-y^2+2xy-2x\right).$$

   Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz,$$

   onde $C=\{z\in\mathbb{C}: |z-i|=4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

3. Considere a seguinte função $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

$$u(x,y)=x^3+y^3-3xy(x+y)$$

   (a) Mostre que u é uma função harmónica.

   (b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0,0)=0$.

   (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz,$$

   onde $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ e C é a curva $\{z\in\mathbb{C}: |z|=2\}$ percorrida no sentido positivo.

4. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \text{Re}\,[g(x+iy)]$ e $v(x,y) = \text{Im}\,[g(x+iy)]$.

   (a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

   (b) Mostre que u é uma função harmónica.

   (c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\text{Re}\,(f) = u$.

5. Calcule os raios de convergência das seguintes séries de potências:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n^4+1}, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-i)^n,$$

$$\text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n, \qquad \text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}.$$

6. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se } n \text{ par} \\ 3^n & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}.$$

   Sabendo que esta é a série de Maclaurin de uma função f, analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

7. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

   (a) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.

   (b) e^z , em torno de $z = i2\pi$.

   (c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.

8. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

   (a) $\dfrac{1}{z-1}$, $|z| > 1$.

   (b) $z^5\left(e^{\frac{1}{z}} + z\right)$, $|z| > 0$.

   (c) $\dfrac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i| > 1$.

   (d) $(3z^2-1)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z^3+z}{z^3}\right)$, $|z| > 0$.

9. Determine a série de Laurent de $\dfrac{1}{\left(z^2-1\right)^2}$ nas seguintes regiões:

   (a) $0 < |z-1| < 2$.

   (b) $2 < |z-1|$.

   e calcule os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}\, dz$.

   (b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}\, dz$

10. Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{\left((z-i)^2+(z-i)-6\right)(z-i)^{20}}\, dz \, .$$

   Sugestão: Considere $\xi = z - i$ e desenvolva $\frac{1}{\xi^2+\xi-6}$ em série de potências de ξ.