Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

11 de Abril de 2003

Semana 4

1. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z-i|+|z-2i|=2$, percorrida no sentido positivo. Calcule

   (a) $\displaystyle\oint_\Gamma z^5\, e^{z^2\cos^2 z}\, dz$

   (b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{z^5\, e^{z^2\cos^2 z}}{2z-i\pi}\, dz$

   (c) $\displaystyle\oint_\Gamma \tfrac{1}{z^2(z-i)^3}\, dz.$

   (d) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i)^{11}}\, dz$.

Resolução:

a) A função $z^5\, e^{z^2\cos^2 z}$ é analítica em $\mathbb{C}$. De facto $\cos^2 z$ é o produto de duas funções analíticas ($\cos z$), portanto $z^2\cos^2 z$ também o é. Assim $e^{z^2\cos^2 z}$ é a composição de funções analíticas (a função exponencial composta com a função $z^2\cos^2 z$). Finalmente $z^5\, e^{z^2\cos^2 z}$ é o produto das funções z^5 e $e^{z^2\cos^2 z}$, pelo que é também uma função analítica em $\mathbb{C}$.

Então o Teorema de Cauchy garante-nos que

$$\oint_\Gamma z^5\, e^{z^2\cos^2 z}\, dz = 0$$

b)Temos

$$2z-i\pi=0 \Leftrightarrow z=\frac{i\pi}{2},$$

e

$$\left|\frac{i\pi}{2}-i\right|+\left|\frac{i\pi}{2}-2i\right|=\frac{\pi-2}{2}+\frac{4-\pi}{2}=1<2.$$

Concluímos que o ponto $\frac{i\pi}{2}$ é a única singularidade da função $\frac{z^5\,\mathrm{e}^{z^2\cos^2 z}}{2z-i\pi}$ e é um ponto interior à região limitada pela elipse $|z-i|+|z-2i|=2$. Pelo que podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy (porque a função $z^5\,\mathrm{e}^{z^2\cos^2 z}$ é analítica):

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{z^5\,\mathrm{e}^{z^2\cos^2 z}}{2z-i\pi}\,dz &= \frac{1}{2}\oint_\Gamma \frac{z^5\,\mathrm{e}^{z^2\cos^2 z}}{z-\frac{i\pi}{2}}\,dz \\
&= \frac{1}{2}2\pi i\left[z^5\,\mathrm{e}^{z^2\cos^2 z}\right]_{z=\frac{i\pi}{2}} \\
&= \pi i\left(\frac{i\pi}{2}\right)^5\exp\left(\left(\frac{i\pi}{2}\right)^2\cos^2\frac{i\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi^6}{2^5}\exp\left(-\frac{\pi^2}{2^2}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2\right) \\
&= -\frac{\pi^6}{2^5}\exp\left(-\frac{\pi^2}{2^4}\left(e^{-\pi}+e^{\pi}+2\right)\right)
\end{aligned}$$

c)A função $\frac{1}{z^2(z-i)^3}$ tem singularidades nos pontos $z=0$ e $z=i$. Enquanto que o ponto $z=i$ pertence ao interior à região limitada pela elipse $|z-i|+|z-2i|=2$, o mesmo não acontece com $z=0$. Então a função $\frac{1}{z^2}$ é analítica na referida região e temos (pelas fórmulas integrais de Cauchy)

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{1}{z^2\,(z-i)^3}\,dz &= \oint_\Gamma \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-i)^3}\,dz \\
&= \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z^2}\right]_{z=i} \\
&= \pi i\left[\frac{6}{z^4}\right]_{z=i} \\
&= 6\pi i
\end{aligned}$$

d) Também por aplicação directa das fórmulas integrais de Cauchy, temos

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i)^{11}}\,dz &= \frac{2\pi i}{10!}\left[\frac{d^{10}}{dz^{10}}\cos z\right]_{z=i} \\
&= \frac{2\pi i}{10!}\left[-\cos z\right]_{z=i} \\
&= -\frac{2\pi i}{10!}\cos i \\
&= -\frac{\pi i}{10!}\left(e+e^{-1}\right)
\end{aligned}$$

2. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

Sejam u e v, respectivamente, a parte real e imaginária f:

$$u = x^2 - y^2 - 2xy + 2y \quad \text{e} \quad v = x^2 - y^2 + 2xy - 2x$$

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x - 2y = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -2y - 2x + 2 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(2x + 2y - 2\right).
\end{aligned}$$

Pelo que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann e as suas derivada parciais são contínuas. Podemos então concluir que $f(z)$ é uma função analítica em todo plano complexo (e portanto, num aberto simplesmente conexo que contem a curva C).

Por outro lado a curva C é uma curva regular e fechada percorrida uma vez no sentido directo; e o ponto $z = 2$ está contido no interior da região limitada pela curva C; de facto $|2 - i| = \sqrt{5} < 4$.

Então podemos aplicar as fórmulas integrais de Cauchy para obter:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz &= 2\pi i \frac{f'(2)}{1!} \\
&= 2\pi i \left(\frac{\partial u}{\partial x}(2,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(2,0)\right) \\
&= 2\pi i \left(4 + i\left(4 - 2\right)\right) \\
&= -4\pi + i8\pi
\end{aligned}$$

3. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x+y)$$

(a) Mostre que u é uma função harmónica.

(b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0,0) = 0$.

(c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz,$$

onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

Resolução:

a)Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 - 6xy;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6y \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6x.$$

Pelo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Como claramente $u \in C^2$, mostrámos que u é harmónica.

b)Temos de ter

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 6xy - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 3y^2 - 3x^2 - 6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Primitivando a primeira equação em ordem a y, obtemos

$$v = 3yx^2 - 3xy^2 - y^3 + c_1(x),$$

e usando esta igualdade na segunda equação vem

$$3y^2 - 3x^2 - 6xy = -6yx + 3y^2 - c_1'(x).$$

Donde

$$c_1'(x) = 3x^2,$$

ou seja

$$c_1(x) = x^3 + c,$$

onde c é uma constante real. Obtemos então

$$v = x^3 + 3yx^2 - 3xy^2 - y^3 + c.$$

Da condição $v(0,0) = 0$, obtemos $c = 0$ e portanto

$$v = x^3 + 3yx^2 - 3xy^2 - y^3.$$

c) Pelas fórmulas integrais de Cauchy, temos (uma vez que f é analítica e o ponto 1 é interior ao circulo $|z| \leqslant 2$)

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz = i2\pi f'(1).$$

Como
$$f(x+iy) = x^3 + y^3 - 3yx^2 - 3xy^2 + i\left(x^3 + 3yx^2 - 3xy^2 - y^3\right),$$
vem
$$f'(x+iy) = 3x^2 - 6xy - 3y^2 + i\left(3x^2 + 6yx - 3y^2\right).$$
Pelo que

$$\begin{aligned} f'(1) &= \left[3x^2 - 6xy - 3y^2 + i\left(3x^2 + 6yx - 3y^2\right)\right]_{x=1,y=0} \\ &= 3 + i3, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz &= i2\pi 3(1+i) \\ &= -6\pi(1-i). \end{aligned}$$

4. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \mathrm{Re}\,[g(x+iy)]$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}\,[g(x+iy)]$.

   (a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

   (b) Mostre que u é uma função harmónica.

   (c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\mathrm{Re}\,(f) = u$.

Resolução:

a) Temos

$$\begin{aligned} g(x+iy) &= (x+iy)\left((x+iy)^2 + \overline{(x+iy)}^2 - |\,(x+iy)\,|^2\right) \\ &= (x+iy)\left(\left(x^2 - y^2 + i2xy\right) + \left(x^2 - y^2 - i2xy\right) - \left(x^2 + y^2\right)\right) \\ &= (x+iy)\left(x^2 - 3y^2\right), \end{aligned}$$

pelo que
$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{e} \quad v(x,y) = yx^2 - 3y^3.$$
As equações de Cauchy–Riemann ficam

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 = x^2 - 9y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -2xy = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Da primeira equação vem $2x^2 + 6y^2 = 0$ e portanto $x = y = 0$. Concluímos que as equações de Cauchy–Riemann só são satisfeitas na origem. Como não existe nenhum conjunto aberto aonde a função satisfaça estas equações concluímos que f não é analítica (qualquer que seja a região considerada).

b) Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x.$$

Pelo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Como claramente $u \in C^2$, mostrámos que u é harmónica.

c) Seja $f = u + iw$, i.e. $w(x, y) = \operatorname{Im}[g(x + iy)]$. Temos de ter

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -\frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

Primitivando a primeira equação em ordem a y, obtemos

$$w = 3yx^2 - y^3 + c_1(x),$$

e usando esta igualdade na segunda equação vem

$$-6xy = -6yx - c_1'(x).$$

Donde

$$c_1'(x) = 0,$$

ou seja $c_1(x) = c$ é uma constante real. Obtemos então, tomando $c = 0$,

$$w = 3yx^2 - y^3.$$

Portanto

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= u(x, y) + iw(x, y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + i\left(3yx^2 - y^3\right). \end{aligned}$$

5. Determine o interior da região de convergência das séries de potências:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z - i)^n}{n^4 + 1}, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z + 1 - i)^n,$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z + 1)^n, \qquad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}.$$

Resolução:

a) Temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n^4+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(z-\frac{i}{2}\right)^n}{n^4+1},$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{2^n}{n^4+1}}{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^4+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{(n+1)^4+1}{n^4+1} = \frac{1}{2}.$$

Pelo que o raio de convergência desta série é $\frac{1}{2}$. O interior da região de convergência é

$$\left\{z\in\mathbb{C} : \left|z-\frac{i}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z-(-1+i))^n$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Pelo que o raio de convergência desta série é $+\infty$ $\left(=\frac{1}{0}\right)$. O interior da região de convergência é $\mathbb{C}$.

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z-(-1))^n$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= e.
\end{aligned}$$

Pelo que o raio de convergência desta série é e. O interior da região de convergência é

$$\left\{z\in\mathbb{C} : |z+1| < e\right\}.$$

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

com

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n}^{\sqrt{n}} & \text{, se } n \text{ é um quadrado perfeito} \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Então (onde $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ designa o maior dos sublimites de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$)

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{a_{n^2}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{n^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pelo que o raio de convergência desta série é 1. O interior da região de convergência é

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

6. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se} \quad n \text{ par} \\ 3^n & \text{se} \quad n \text{ impar} \end{cases} .$$

Sabendo que esta é a série de Maclaurin de uma função f, analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

Resolução:

O maior dos sublimites da sucessão $\sqrt[n]{|a_n|}$ é $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 5$, porque

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 5 & \text{se} \quad n \text{ par} \\ 3 & \text{se} \quad n \text{ impar} \end{cases} .$$

O raio de convergência da série é pois $R = \frac{1}{5}$.
Para $|z| < \frac{1}{5}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (5z)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (3z)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{1-(5z)^2} + \frac{3z}{1-(3z)^2} \\ &= \frac{1}{1-25z^2} + \frac{3z}{1-9z^2} . \end{aligned}$$

Concluímos que a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{1-25z^2} + \frac{3z}{1-9z^2}$$

que é analítica em $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$, tem a série dada como série de Maclaurin. Pelo que

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1-25} + \frac{3}{1-9} \\ &= -\frac{5}{12}\,. \end{aligned}$$

7. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

   (a) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.

   (b) e^z , em torno de $z = i2\pi$.

   (c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.

Resolução:

a)$\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(z - \pi + \pi) \\ &= -\operatorname{sen}(z - \pi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \end{aligned}$$

b)e^z , em torno de $z = i2\pi$.

$$\begin{aligned} e^z &= e^{z-i2\pi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i2\pi)^n}{n!} \end{aligned}$$

c)$z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.

$$
\begin{aligned}
z^2e^z &= e\left(z-1+1\right)^2 e^{z-1}\\
&= e\left((z-1)^2+2\left(z-1\right)+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}\\
&= e\left(1+3(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(z-1)^n\right)\\
&= e\left(1+3(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}(z-1)^n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}e\frac{n^2+n+1}{n!}(z-1)^n
\end{aligned}
$$

8. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

   (a) $\dfrac{1}{z-1}$, $|z|>1$.

   (b) $z^5\left(e^{\frac{1}{z}}+z\right)$, $|z|>0$.

   (c) $\dfrac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i|>1$.

   (d) $(3z^2-1)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z^3+z}{z^3}\right)$, $|z|>0$.

Resolução:

a) $\dfrac{1}{z-1}$, $|z|>1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}
\end{aligned}
$$

b) $z^5\left(e^{\frac{1}{z}}+z\right)$, $|z|>0$.

$$
\begin{aligned}
z^5e^{\frac{1}{z}} &= z^6+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-5}}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{5}\frac{z^n}{(5-n)!}+z^6
\end{aligned}
$$

c) $\dfrac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i|>1$. Seja $\xi = \dfrac{1}{(z-i)}$; portanto $|\xi|<1$ e

$$\begin{aligned}
\frac{z-i}{(z-2i)^2} &= \frac{z-i}{(z-i)^2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{i}{(z-i)}\right)^2} \\
&= \xi\frac{1}{(1-i\xi)^2} \\
&= -i\xi\frac{d}{d\xi}\frac{1}{(1-i\xi)} \\
&= -i\xi\frac{d}{d\xi}\sum_{n=0}^{\infty} i^n\xi^n \\
&= -i\xi\sum_{n=1}^{\infty} i^n n\xi^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n i^{n-1}\xi^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n i^{n-1}(z-1)^{-n}
\end{aligned}$$

d) $(3z^2-1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z^3+z}{z^3}\right)$, $|z|>0$.

$$\begin{aligned}
\left(3z^2-1\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z^3+z}{z^3}\right) &= \left(3z^2-1\right)\mathrm{sen}\left(\pi+\frac{1}{z^2}\right) \\
&= -\left(3z^2-1\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\
&= -\left(3z^2-1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{3}{z^{4n}}-\frac{1}{z^{4n+2}}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0} a_{2n}\,z^{2n},
\end{aligned}$$

$$\text{com} \qquad a_{2n} = \begin{cases} \dfrac{3\,(-1)^{\frac{-n}{2}+1}}{(1-n)!} & \text{se } n \leqslant 0 \text{ par} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{-\frac{n+1}{2}}}{(-n)!} & \text{se } n < 0 \text{ impar} \end{cases}.$$

9. Determine a série de Laurent de $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ nas seguintes regiões:

(a) $0 < |z-1| < 2$.

(b) $2 < |z-1|$.

e calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$.

(b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$

Resolução:

a) Pondo $\xi = z-1$, temos, para $0 < \left|\frac{\xi}{2}\right| < 1$ (ou seja $0 < |z-1| < 2$),

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{(z+1)^2} \\
&= \frac{1}{\xi^2}\frac{1}{(\xi+2)^2} \\
&= \frac{-1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\frac{1}{(\xi+2)} \\
&= \frac{-1}{2\xi^2}\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\left(\frac{\xi}{2}+1\right)} \\
&= \frac{-1}{2\xi^2}\frac{d}{d\xi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \xi^n \\
&= \frac{-1}{2\xi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n n\xi^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} n\xi^{n-3} \\
&= \sum_{n=-2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+4} (n+3)(z-1)^n \ .
\end{aligned}
$$

Portanto, como a circunferência $|z-1| = 1$ está contida no ânulo $0 < |z-1| < 2$ aonde a série de Laurent obtida acima é convergente, vem:

$$
\begin{aligned}
\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz &= 2\pi i \left[\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+4}(n+3)\right]_{n=-1} \\
&= -\frac{\pi i}{2} \ .
\end{aligned}
$$

b) Pondo $\xi = \frac{1}{z-1}$, temos, para $|2\xi| < 1$ (ou seja $|z-1| > 2$),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z^2-1)^2} &= \xi^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{\xi}+2\right)^2} \\
&= \xi^4 \frac{1}{(1+2\xi)^2} \\
&= \frac{-\xi^4}{2} \frac{d}{d\xi} \frac{1}{(1+2\xi)} \\
&= \frac{-\xi^4}{2} \frac{d}{d\xi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \xi^n \\
&= \frac{-\xi^4}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n n\xi^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n-1} n\xi^{n+3} \\
&= \sum_{n=4}^{+\infty} (-2)^{n-4} (n-3)\, \xi^n \\
\frac{1}{(z^2-1)^2} &= \sum_{n=4}^{+\infty} (-2)^{n-4} (n-3)\, (z-1)^{-n} \ .
\end{aligned}$$

Portanto, como a circunferência $|z-1| = 3$ está contida no ânulo $2 < |z-1|$ aonde a série de Laurent agora obtida é convergente, vem:

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz = 0 \ ,$$

uma vez que não aparece a potência -1 na referida série.

10. Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{\left((z-i)^2 + (z-i) - 6\right)(z-i)^{20}}\, dz \ .$$

Sugestão: Considere $\xi = z - i$ e desenvolva $\frac{1}{\xi^2+\xi-6}$ em série de potências de ξ.

Resolução:

De acordo com a sugestão, temos (para $|\xi| < 2$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi^2+\xi-6} &= \frac{1}{(\xi-2)(\xi+3)} \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(\xi-2)} - \frac{1}{(\xi+3)}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{2}\right)} - \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{\xi}{3}\right)}\right) \\
&= \frac{-1}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\xi^n - \frac{1}{15}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \xi^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{10}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{15}\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)\xi^n .
\end{aligned}$$

A função

$$h(z) = \frac{1}{\left((z-i)^2 + (z-i) - 6\right)(z-i)^{20}}$$

tem apenas três singularidades isoladas: $z = i+2$ (pólo de 1ªordem), $z = i-3$ (pólo de 1ªordem), $z = i$ (pólo de 20ªordem). Como as singularidades $z = i+2$ e $z = i-3$ são exteriores ao círculo $|z| \leqslant 2$, e pelo contrário $z = i$ é interior a este círculo, temos pelo Teorema do Resíduos:

$$\oint_{|z|=2} h(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} h(z) .$$

Atendendo aos cálculos já realizados obtemos (para $0 < |z-i| < 2$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left((z-i)^2 + (z-i) - 6\right)(z-i)^{20}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{10}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{15}\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)(z-i)^{n-20} \\
&= \sum_{n=-20}^{+\infty}\left(\frac{-1}{10}\frac{1}{2^{n+20}} - \frac{1}{15}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+20}\right)(z-i)^n ,
\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=i} h(z) &= \left[\frac{-1}{10}\frac{1}{2^{n+20}} - \frac{1}{15}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+20}\right]_{n=-1} \\
&= \frac{-1}{10}\frac{1}{2^{19}} - \frac{1}{15}\left(\frac{-1}{3}\right)^{19} \\
&= \left(\frac{-1}{5}\frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^{20}}\right) \\
&= \frac{-2^{-20}}{5}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{\left((z-i)^2 + (z-i) - 6\right)(z-i)^{20}}\,dz = \frac{-2^{-19}\pi i}{5}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right)$$