Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 5

1) Determine e classifique as singularidades das seguintes funções. Calcule os resíduos correspondentes.

   a) $f_1(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z - \pi}$

   b) $f_2(z) = \dfrac{z}{(z^2 + 2)^2}$

   c) $f_3(z) = \dfrac{1}{z^7(1 - z^2)}$

   d) $f_4(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4(1 - z^2)}$

   e) $f_5(z) = z^2 \exp \dfrac{1}{z}$

2) Justifique que a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{z}}$$

tem uma singularidade em $z = 0$, a qual não é isolada.

3) Calcule:

$$\oint_C \frac{1}{e^{z^2} - 1}\, dz,$$

onde C é a circunferência $|z| = \sqrt{7}$ percorrida no sentido positivo.

4) Utilizando o Teorema dos resíduos, calcule os seguintes integrais:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)}\, dx$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4\cos 2\theta}\, d\theta$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx, \qquad (a, b > 0, a \neq b)$

5) Utilizando o Teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n}\, dx,$$

onde n é um natural maior ou igual que 2.

Sugestão: Considere a fronteira da região

$$\left\{ z = \rho e^{i\theta} :\ \rho \in \left]0, R\right[,\ \theta \in \left]0, \tfrac{2\pi}{n}\right[\right\},$$

com $R > 1$.