Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas - Sugestões para resolução.

Semana 5

1) Determine e classifique as singularidades das seguintes funções. Calcule os resíduos correspondentes.

a)
$$f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z-\pi}.$$
A função tem uma singularidade removível em $z=\pi$, como se pode ver facilmente calculando o limite de $f_1(z)$ quando $z \to 0$.

b)
$$f_2(z) = \frac{z}{(z^2+2)^2}.$$
Singularidades em $z=\sqrt{2}i$ e $z=-\sqrt{2}i$ (pólos duplos).

c)
$$f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z^2)}.$$
Singularidades (pólos simples) em $z=1$ e $z=-1$, e um pólo de ordem 7 em $z=0$ (o resíduo em $z=0$ pode ser obtido desenvolvendo $\frac{1}{1-z^2}$ em série de potências convergente para $|z|<1$).

d)
$$f_4(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(1-z^2)}.$$
Pólo triplo em $z=0$ (uma vez que $\lim_{z\to 0} z^3 f_4(z)$ é finito e diferente de zero), e pólos simples em $z=1$ e $z=-1$.

e)
$$f_5(z) = z^2 \exp\frac{1}{z}.$$
Singularidade essencial em $z=0$ (basta desenvolver $\exp\frac{1}{z}$ em série de Laurent em torno do ponto 0, para chegar a essa conclusão).

2) Justifique que a função
$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{z}}$$
tem uma singularidade em $z=0$, a qual não é isolada. A função tem singularidades em $z : \frac{\pi}{z} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, em $z=0 \vee z=\frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Logo, temos uma sucessão de pontos singulares convergente para $z=0$.

3) Calcule:
$$\oint_C \frac{1}{e^{z^2}-1}\,dz,$$

onde C é a circunferência $|z| = \sqrt{7}$ percorrida no sentido positivo. A função tem singularidades em pontos $z = x + iy$ que verificam

$$x^2 = y^2, xy = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

As singularidades interiores a C, correspondem portanto a pontos que verificam essas condições, com $|k| = 0, 1$. Desenvolvendo e^{z^2} em série de potências de z, é fácil ver que $z = 0$ é um pólo duplo, e calcular o resíduo correspondente. Similarmente, para uma outra singularidade (digamos z_i), fácilmente se mostra que é um pólo simples e com o mesmo cálculo fica determinado o seu resíduo. Finalmente, basta aplicar o T. dos resíduos.

4) O cálculo desses integrais não tem nada de transcendente. Relativamente ao integral $b)$, o seu cálculo é simplificado se, atendendo às propriedades do coseno, fizermos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(6\theta)}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \frac{1+\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{i3\theta}}{5-4\cos(\theta)}\, d\theta.$$

Para além desta sugestão, deixo apenas as soluções:

a) Res. $\frac{(3-\sqrt{3})\pi}{6}$.
b) Res. $\frac{3\pi}{8}$.
c) Res. $\frac{\pi}{b^2-a^2}(b^2e^{-b} - a^2e^{-a})$.

5) Utilizando o Teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx,$$

omde n é um natural maior ou igual que 2. **Sugestão:** Considere a fronteira da região

$$\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \in]0, R[, \theta \in]0, \frac{2\pi}{n}[\},$$

com $R > 1$. A região considerada (cuja fronteira designaremos por C),contêm no seu interior uma raíz enésima de $z = -1$, (chamemos-lhe w) e portanto, pelo T. dos resíduos,

$$\oint_C \frac{1}{1+z^n}\, dz = 2\pi i \mathrm{res} f(w).$$

O contorno C é dado por: $C = [0, R] \cup C_1 \cup C_2$, onde C_1 é o arco de circunferência centrada na origem e de raio R, para $\theta \in [0, \frac{2\pi}{n}]$, e $C_2 = \{z = re^{i\frac{2\pi}{n}}, 0 < r < R\}$. Como habitualmente, é fácil ver que $\int_{C_1} \frac{1}{1+z^n}\, dz$ tende para zero quando $R \to +\infty$. Quanto ao integral em C_2, é fácil ver que é igual a:

$$\int_{C_2} \frac{1}{1+z^n}\, dz = -\int_0^R \frac{1}{1+r^n} e^{i\frac{2\pi}{n}}\, dr,$$

pelo que:

$$(1 - \cos\frac{2\pi}{n})\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx = \mathrm{Re}(2\pi i \mathrm{res} f(w)).$$