Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 6

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

   a) $x' = -tx$.

   b) $\psi' = \psi - t$.

   c) $g'(t) = 2tg(t) + t$

   d) $w' = \frac{2t}{1+t^2}w + t^2 - 1$.

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy

   a) $x' = 2tx + t,\ x(0) = 1$.

   b) $\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v - \frac{1}{1+u^2} = 0,\ v(0) = 1$.

   c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$

3. Num dado instante vivem, numa determinada floresta, cem coelhos. Sabendo que a taxa de natalidade dos coelhos é de 2% por dia e e a taxa de mortalidade é de 1% por dia, determine a população dos coelhos ao fim de dez semanas.

4. Num reservatório contendo um quilolitro de água é introduzido um resíduo industrial a um caudal de um litro por minuto. A mistura é instantaneamente homogeneizada e despejada do reservatório à mesma taxa. Determine a concentração do resíduo no reservatório ao fim de T minutos e calcule quanto tempo é necessário decorrer até a concentração do resíduo atingir 20%.

5. Dada uma equação diferencial $\dfrac{dy}{dt} + a(t)\,y = f(t)$ com $a(t)$ e $f(t)$ contínuas em $\mathbb{R}$, $a(t) \geqslant c > 0$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$, mostre que todas as soluções tendem para zero quando t tende para $+\infty$.

6. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

   b) $u' = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$.

   c) $\varphi' = e^{\varphi - t}$.

   d) $f' = \dfrac{f + x}{x}$.

   e) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$.

7. Determine a solução do problema de Cauchy $3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0$, $x(0) = 1$, e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

8. Considere a equação diferencial

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \left(x^3 - \log y\right) = 0. \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}\log y$.

c) Explicite as soluções e determine intervalo máximo de existência de cada solução.

9. Considere a equação diferencial

$$\left(4y^2 + 2x\right)\frac{dy}{dx} = -y$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

10. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

a) Mostre que (2) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (2) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.