Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

16 de Abril de 2003

Semana 7

1. Resolva a equação $y' + y = e^t y^2$. (Sugestão: faça a mudança de variável $y = 1/u$)

2. Suponha que temos uma equação diferencial da forma ($a \neq 0$)

$$\frac{dy}{dt} = f\,(ay + bt + c) \ ,$$

como, por exemplo, a equação $\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(y + 2t + 3)$. Como o segundo membro da equação depende apenas de $ay + bt + c$, é natural fazer a substituição $v = ay + bt + c$, ou seja, $y = \frac{v - bt - c}{a}$.

Mostre que esta substituição transforma $\frac{dy}{dt} = f(ay + bt + c)$ na equação equivalente

$$\frac{dv}{dt} = af(v) + b \ ,$$

que é separável. Aproveite este resultado para resolver a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -\Big((t + y)^2 + 1\Big)\arctan\,(t + y) - 1 \ .$$

3. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty} \quad , \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y > 0$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.
Sugestão: Considere a mudança de varável $v = y/t$.

4. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$\text{(a) } y' = \frac{t\,y}{1+t^2}\,, \qquad \text{(b) } y' = (2-y)\,(y-1),$$

$$\text{(c) } y' = y\,(1-y^2)\,, \quad \text{(d) } y' = \frac{y+t}{y-t}\,,$$

5. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\,\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0\ , \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

6. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0\ , \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

7. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1-y^2 \\ y(1/2) = 2\ , \end{cases}$$

   (i) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.

   (ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

   (iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

8. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1\ , \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1\ . \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geqslant \frac{1}{3\left(u(t)\right)^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}}\ ,$$

e integre esta relação entre 0 e t.

9. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} y' = -yg(t,y) + e^{-t} \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \to [1, +\infty[$ tem derivadas parciais contínuas para todo o $(t,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que a solução da equação dada está definida para todo o t positivo.

(b) O que pode dizer quanto ao limite de y quando $t \to +\infty$?