Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 8

1. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Resolução:O polinómio característico da matriz $\mathbf{A}$ é $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = -12\lambda+8\lambda^2-\lambda^3 = -\lambda(2-\lambda)(6-\lambda)$. Logo A tem três vectores próprios *distintos*, e existe uma base de $\mathbb{R}^3$ de vectores próprios.

Por exemplo, $\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 9 \\ 2 \\ -6 \end{smallmatrix}\right]$ $\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{v}_3 = \left[\begin{smallmatrix} 15 \\ 4 \\ 12 \end{smallmatrix}\right]$ são vectores linearmente independentes e são vectores próprios associados dos valores próprios $0, 2$ e 6 respectivamente. Sendo

$$S = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 15 \\ 2 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$S^{-1}\mathbf{A}S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbf{A}t) &= S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix} S^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 15 \\ 2 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 1 & -\frac{33}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{2t} & \frac{9}{4} - \frac{33}{8}e^{2t} + \frac{15}{8}e^{6t} & -\frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{6t} \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{6t} & -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}e^{6t} \\ 0 & -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{6t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{6t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e a solução da equação é

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \frac{9}{8}e^{2t} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8}e^{6t} \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}e^{6t} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{6t} \end{bmatrix}$$

.

2. Seja
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Resolução: Como a matriz $\mathbf{A}$ tem uma decomposição em blocos na forma $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 \end{smallmatrix}\right]$, onde $\mathbf{B}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{B}_2 = [\,4\,]$, tem-se
$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{B}_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{B}_2 t} \end{bmatrix}.$$
O polinómio característico da matriz $\mathbf{B}_1$ é $(5-\lambda)(3-\lambda)+1 = (4-\lambda)^2$. Como o espaço próprio da matriz $\mathbf{B}_1$ é
$$E = \left\{ \mathbf{v} = \alpha \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$
concluímos que a forma canónica de Jordan associada à matriz $\mathbf{B}_1$ é
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
Designando por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ as colunas duma matriz $\mathbf{S}$ tal que $\mathbf{B}_1 = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}$. Vem
$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$
Portanto $\mathbf{v}_1$ é um vector próprio e podemos tomar
$$\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right].$$
Com esta escolha, $\mathbf{v}_2$ será uma solução de $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{I})\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ ou seja
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right].$$
Podemos tomar
$$\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right].$$
Então
$$\begin{aligned} e^{\mathbf{B}_1 t} &= \mathbf{S} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{S}^{-1} \\ &= \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right] \\ &= e^{4t} \left[\begin{smallmatrix} 1 & t+1 \\ 1 & t \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right] \\ &= e^{4t} \left[\begin{smallmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{smallmatrix}\right] \end{aligned}$$
Portanto
$$e^{\mathbf{A}t} = e^{4t} \begin{bmatrix} t+1 & -t & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}(t-1)}\mathbf{x}(1)\\ &= e^{4(t-1)}\begin{bmatrix} t & 1-t & 0\\ t-1 & 2-t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\ &= e^{4(t-1)}\begin{bmatrix} t\\ t-1\\ 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

Resolução: O polinómio característico da matriz $\mathbf{A}$ é $p(\lambda) = (2-\lambda)^3 + 1$. Logo os valores próprios são

$$3, \quad 2 - e^{i\pi/3} \quad \text{e} \quad 2 - e^{-i\pi/3}.$$

Observe-se que $2 - e^{i\pi/3} = \overline{2 - e^{-i\pi/3}} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$. Como $\mathbf{A}$ é uma matriz *real* segue-se que se $\mathbf{v}$ é um vector em $\mathbb{C}^3$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}\mathbf{v}$, então $\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\bar{\mathbf{v}}$.

Tem-se que $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ é um vector próprio associado ao valor próprio 3. Portanto $\mathbf{v}_1(t) = e^{3t}\mathbf{v}_1$ é uma solução da equação $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Tem-se que $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-e^{-i\pi/3}\\-e^{i\pi/3}\end{bmatrix}$ é um vector próprio associado ao valor $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$. Logo

$$\mathbf{v}_2(t) = \exp[\frac{3-i\sqrt{3}}{2}t]\mathbf{v}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3(t) = \exp[\frac{3+i\sqrt{3}}{2}t]\bar{\mathbf{v}}_2$$

são soluções.

Então

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1(t) + c_2\mathbf{v}_2(t) + c_3\mathbf{v}_3(t),$$

para certos escalares c_1, c_2 e c_3 em $\mathbb{C}$. Utilizando a condição inicial temos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} &= c_1\mathbf{v}_1(0) + c_2\mathbf{v}_2(0) + c_3\mathbf{v}_3(0)\\ &= c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\-e^{-i\pi/3}\\-e^{i\pi/3}\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\-e^{i\pi/3}\\-e^{-i\pi/3}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -e^{-i\pi/3} & -e^{i\pi/3}\\ 1 & -e^{i\pi/3} & -e^{-i\pi/3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Donde (utilizando o método dos cofactores para calcular a primeira coluna da inversa matriz indicada)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -e^{-i\pi/3} & -e^{i\pi/3} \\ 1 & -e^{i\pi/3} & -e^{-i\pi/3} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{e^{-i2\pi/3} - 2e^{i\pi/3} - e^{i2\pi/3} + 2e^{-i\pi/3}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -e^{-i\pi/3} & -e^{i\pi/3} \\ -e^{i\pi/3} & -e^{-i\pi/3} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -e^{i\pi/3} & -e^{-i\pi/3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -e^{-i\pi/3} & -e^{i\pi/3} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{-2i\,\mathrm{sen}\,(2\pi/3) - 4i\,\mathrm{sen}\,(\pi/3)} \begin{bmatrix} e^{-i2\pi/3} - e^{i2\pi/3} \\ e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3} \\ e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{-3i\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -2i\,\mathrm{sen}(2\pi/3) \\ -2i\,\mathrm{sen}(\pi/3) \\ -2i\,\mathrm{sen}(\pi/3) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente obtemos a solução:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{v}_1(t) + c_2\mathbf{v}_2(t) + c_3\mathbf{v}_3(t) \\
&= \frac{1}{3}e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\exp[\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}t] \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{-i\pi/3} \\ -e^{i\pi/3} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\exp[\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}t] \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/3} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \\ -\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução: Como a matriz $\mathbf{A}$ é triangular superior vê-se que 2 é o único valor próprio. Como o espaço próprio da matriz $\mathbf{A}$ é

$$E = \left\{ \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall\alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

concluímos que a forma canónica de Jordan associada à matriz $\mathbf{A}$ é

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designando por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ as colunas duma matriz $\mathbf{S}$ tal que $\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}$. Vem

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{v}_1\\ A\mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1\\ A\mathbf{v}_3 &= 2\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Portanto $\mathbf{v}_1$ é um vector próprio e podemos tomar

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Com esta escolha, $\mathbf{v}_2$ será uma solução de $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\,\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1$ ou seja

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Podemos tomar

$$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Com esta escolha, por sua vez $\mathbf{v}_3$ será uma solução de $(\mathbf{A}-\mathbf{I})\,\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_2$ ou seja

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Podemos tomar

$$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}&\frac{t^2}{2}e^{2t}\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\\ &= e^{2t}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t+\frac{t^2}{2}&t&1\\1+t&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\\ &= e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\t&1&0\\t+\frac{t^2}{2}&t&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\t&1&0\\t+\frac{t^2}{2}&t&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\ &= e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1+t\\1+2t+\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

5. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

Resolução:

Procura de uma solução constante:

Substituindo no sistema $x(t) = \alpha$, $y(t) = \beta$ ($\forall t \in \mathbb{R}$), vem

$$\begin{cases} 0 = 14\alpha - 10\beta + 1 \\ 0 = 10\alpha - 2\beta + 2 \end{cases}$$

que tem como única solução $\left\{\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = -\frac{1}{4}\right\}$.
Concluímos que $x(t) = -\frac{1}{4}$, $y(t) = -\frac{1}{4}$ é uma solução particular do sistema de EDO's dado. Vamos agora determinar a solução geral do sistema homogéneo associado:

$$u' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} u. \tag{0.1}$$

O polinómio característico de $\begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$ é $\lambda^2 - 12\lambda + 72 = (\lambda - 6)^2 + 36$. Portanto os seus valores próprios são $6 + 6i$ e $6 - 6i$. Determinamos agora um vector próprio v associado a valor p. $6 + 6i$, i. e. v tal que

$$\begin{bmatrix} 8 - 6i & -10 \\ 10 & -8 - 6i \end{bmatrix} v = 0,$$

por exemplo

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 - 3i \end{bmatrix}.$$

Então $u_1 = e^{(6+i6)t}v$ e $u_2 = e^{(6-i6)t}\bar{v}$ são soluções de (0.1). Pelo que a solução geral deste sistema (0.1) é dada por

$$\begin{aligned}
& c_1\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) + c_2\left(\frac{u_1 - u_2}{2i}\right) \\
&= c_1 e^{6t}\left(\frac{e^{i6t}v + e^{-i6t}\bar{v}}{2}\right) + c_2 e^{6t}\left(\frac{e^{i6t}v - e^{-i6t}\bar{v}}{2i}\right) \\
&= c_1 e^{6t}\begin{bmatrix} 5\frac{e^{i6t}+e^{-i6t}}{2} \\ 4\frac{e^{i6t}+e^{-i6t}}{2} - 3i\frac{e^{i6t}-e^{-i6t}}{2} \end{bmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{bmatrix} 5\frac{e^{i6t}-e^{-i6t}}{2i} \\ 4\frac{e^{i6t}-e^{-i6t}}{2i} - 3\frac{e^{i6t}+e^{-i6t}}{2} \end{bmatrix} \\
&= c_1 e^{6t}\begin{bmatrix} 5\cos(6t) \\ 4\cos(6t) + 3\sin(6t) \end{bmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{bmatrix} 5\sin(6t) \\ 4\sin(6t) - 3\cos(6t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pelo que a solução geral do sistema de EDO's dado é

$$\begin{aligned} x(t) &= 5c_1e^{6t}\cos(6t) + 5c_2e^{6t}\sin(6t) - \frac{1}{4} \\ y(t) &= c_1e^{6t}(4\cos(6t) + 3\sin(6t)) + c_2e^{6t}(4\sin(6t) - 3\cos(6t)) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

6. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + t^6 \\ y' = -x + 2y + t^5 \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

Resolução: Escrevendo o sistema na forma matricial $u' = \mathbf{A}u + \mathbf{b}$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^6 \\ t^5 \end{bmatrix},$$

temos o seguinte polinómio característico para a matriz $\mathbf{A}$: $(-2-\lambda)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2$. Portanto temos o valor próprio $\lambda = 0$ com multiplicidade 2. A direcção própria associada é

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz equivalente a $\mathbf{A}$ na forma canónica de Jordan é

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo v_1 e v_2 as colunas da matriz mudança de base S, temos ($\mathbf{A}S = SJ$):

$$\mathbf{A}v_1 = 0\ ,\ \mathbf{A}v_2 = v_1.$$

Podemos tomar

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= Se^{tJ}S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2t-1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2t+1 & 4t \\ -t & 1+2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela formula da variação das constantes temos

$$\begin{aligned}
u &= e^{t\mathbf{A}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+e^{t\mathbf{A}}\int_0^t e^{-s\mathbf{A}}\begin{bmatrix}s^6\\s^5\end{bmatrix}ds\\
&= \begin{bmatrix}1+2t\\t+1\end{bmatrix}+e^{t\mathbf{A}}\int_0^t\begin{bmatrix}2s+1 & -4s\\ s & 1-2s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^6\\s^5\end{bmatrix}ds\\
&= \begin{bmatrix}1+2t\\t+1\end{bmatrix}+e^{t\mathbf{A}}\int_0^t\begin{bmatrix}2s^7-3s^6\\ s^7-2s^6+s^5\end{bmatrix}ds\\
&= \begin{bmatrix}1+2t\\t+1\end{bmatrix}+e^{t\mathbf{A}}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}t^8-\frac{3}{7}t^7\\ \frac{1}{8}t^8-\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{6}t^6\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1+2t\\t+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2t+1 & 4t\\ -t & 1+2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}t^8-\frac{3}{7}t^7\\ \frac{1}{8}t^8-\frac{2}{7}t^7+\frac{1}{6}t^6\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1+2t\\t+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{28}t^8+\frac{5}{21}t^7\\ -\frac{1}{56}t^8+\frac{1}{21}t^7+\frac{1}{6}t^6\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1+2t+\frac{5}{21}t^7-\frac{1}{28}t^8\\ 1+t+\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{21}t^7-\frac{1}{56}t^8\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A solução pretendida é

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1+2t+\frac{5}{21}t^7-\frac{1}{28}t^8\\
y(t) &= 1+t+\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{21}t^7-\frac{1}{56}t^8.
\end{aligned}$$

7. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x-2y+t\\ y' = x-y+e^t \end{cases}, \qquad x(0)=y(0)=0.$$

Resolução: Escrevendo o sistema na forma matricial $u' = \mathbf{A}u+\mathbf{b}$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\e^t\end{bmatrix},$$

temos o seguinte polinómio característico para a matriz $\mathbf{A}$: $\lambda^2-\lambda = \lambda(\lambda-1)$. Portanto temos o valores próprios $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$. As direcções próprias associadas são

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}\leftrightarrow 0, \left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}\leftrightarrow 1.$$

A matriz diagonal equivalente a $\mathbf{A}$ é

$$J=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

e a matriz mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= Se^{tJ}S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2e^t \\ 1 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+2e^t & 2-2e^t \\ e^t-1 & 2-e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela formula da variação das constantes temos

$$\begin{aligned} u &= e^{t\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{t\mathbf{A}} \int_0^t e^{-s\mathbf{A}} \begin{bmatrix} s \\ e^s \end{bmatrix} ds \\ &= e^{t\mathbf{A}} \int_0^t \begin{bmatrix} -1+2e^{-s} & 2-2e^{-s} \\ e^{-s}-1 & 2-e^{-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ e^s \end{bmatrix} ds \\ &= e^{t\mathbf{A}} \int_0^t \begin{bmatrix} -s+2se^{-s}+2e^s-2 \\ -s+se^{-s}+2e^s-1 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{t\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}t^2-2te^{-t}-2e^{-t}+2e^t-2t\right)-(-2+2) \\ \left(-\frac{1}{2}t^2-te^{-t}-e^{-t}+2e^t-t\right)-(-1+2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+2e^t & 2-2e^t \\ e^t-1 & 2-e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^2-2te^{-t}-2e^{-t}+2e^t-2t \\ -\frac{1}{2}t^2-te^{-t}-e^{-t}+2e^t-t-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^2+4e^t-2t-4-2te^t \\ -\frac{1}{2}t^2+3e^t-3-te^t-t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução pretendida é

$$\begin{aligned} x(t) &= -4-2t-\frac{1}{2}t^2+2\,(2-t)\,e^t \\ y(t) &= -3-t-\frac{1}{2}t^2+(3-t)\,e^t. \end{aligned}$$

8. Determine uma matriz 2×2, $\mathbf{A}$, tal que uma das soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ seja

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^{2t} - 2e^{-t}\,,\ e^{2t} + 4\,e^{-t}\right)\ .$$

A matriz $\mathbf{A}$ é única?

Resolução: Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} e^{2t} - 2e^{-t} \\ e^{2t} + 4e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{x}' = 2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

De $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, vem

$$2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = e^{2t}\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t}\mathbf{A} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando esta igualdade por e^{-2t} e fazendo $t \to +\infty$, obtemos

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo que o vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vector próprio da matriz $\mathbf{A}$ correspondente ao valor próprio 2. Analogamente (multiplicando agora a igualdade por e^{t} e fazendo $t \to -\infty$) temos

$$- \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

pelo que o vector $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ é vector próprio da matriz $\mathbf{A}$ correspondente ao valor próprio -1. Então

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Concluímos que a matriz $\mathbf{A}$ fica univocamente determinada por (portanto matriz $\mathbf{A}$ é única)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$