Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 10

1. Calcule as transformadas de Laplace e as abcissas de convergência das funções definidas em $t \geqslant 0$ pelas expressões seguintes

   a) $f(t) = \mathrm{ch}(at)$,

   b) $f(t) = t \operatorname{sen} at$,

   c) $f(t) = e^{at} \cos bt$,

   d) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(kt)}{t}$, $(t > 0)$

2. Determine as soluções gerais das seguintes equações diferenciais ordinárias

   a) $x'' - 2x' + x = 5e^t \log t$

   b) $x'' + x = \operatorname{cosec} t$

3. Calcule a inversa de transformada de Laplace de

   a) $(s^2 - 1)^{-2}$,

   b) $6(s^4 + 10s^2 + 9)^{-1}$,

   c) $2s(s^4 + 1)^{-1}$,

4. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   a) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

   b) $y'' + \omega^2 y = \cos 2t$, $\omega^2 \neq 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

   c) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ e } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

5. Designa-se por δ a função de Dirac com suporte na origem. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   a) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$,

   b) $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

   c) $y'' + y = \delta(t - \pi) \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

6. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 \operatorname{tg} y\,, \\[2ex] y(1) = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{dy}{dt}(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Sugestão: Determine $v(y)$ tal que $\dot{y} = v(y)$.

Determine a solução geral de:

7. $y'' + t\,(y')^2 = 0$.

8. $2t^2y'' + (y')^3 = 2ty'$.

9. $yy'' + (y')^2 = 0$.

10. $yy'' = 2\,(y')^2$.