Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

28 de Maio de 2003

Semana 11

1. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:

   (a) $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

   (b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

2. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0,1[\\ u(0,t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1,t) = \operatorname{sen} 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

   b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\operatorname{sen}(2\pi x) - 7\operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x) \ .$$

3. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ x \in (0,\pi), \ \text{com} \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

4. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \ x \in (0,L), \ \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

5. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se } \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

6. Determine a série de Fourier da função $f(x) = x$, no intervalo $]-1,1[$.

7. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

8. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leqslant 0 \end{cases}$$

10. Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = x$ numa série de cosenos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

11. Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

12. Seja $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)\, dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

onde

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{T} t\right) dt$$