Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

12 ª Semana - Resolução

1. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

   (a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

   (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$.

   (c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira $\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$

Resolução:

(a) Definindo $u(x) = Ax + B$, temos $\frac{\partial u}{\partial x} = A$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}$. Pelo que $u(x) = Ax + B$ é uma solução estacionária de $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, quaisquer que sejam as constantes A e B.

(b) Com $u(x) = Ax + B$, temos $u(0) = B = T_1$ e $u(L) = AL + B = T_2$. Portanto

$$B = T_1 \quad \text{e} \quad A = \frac{T_2 - B}{L} = \frac{T_2 - T_1}{L}.$$

A solução estacionária pretendida é $u(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$.

(c) Identificamos, em relação às alíneas anteriores, $L = 1$, $T_1 = 20$ e $T_2 = 60$. Designando por $w(x,t)$ a diferença entre a solução estacionária $u(x) = 40x + 20$ e a solução do problema $u(x,t)$, ou seja

$$w(x,t) = u(x,t) - 40x - 20,$$

obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{com} \quad w(0,t) = w(1,t) = 0 \quad \text{e} \quad w(x,0) = 55 - 40x.$$

Usando o método da separação de variáveis obtemos

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Donde

$$55 - 40x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Determinando os coeficientes desta série de senos vem ($n \in \mathbb{N}_1$), por integração por partes,

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 (55-40x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\
&= 2\left[(55-40x)\frac{\cos(n\pi x)}{-n\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-40)\frac{\cos(n\pi x)}{-n\pi}dx \\
&= 2\left((55-40)\frac{\cos(n\pi)}{-n\pi} - \frac{55}{-n\pi}\right) \\
&= 2\left(\frac{15}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{55}{n\pi}\right) \\
&= \frac{10}{n\pi}\left(3(-1)^{n+1} + 11\right).
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= 20 + 40x + w(x,t) \\
&= 20 + 40x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n\pi}\left(3(-1)^{n+1} + 11\right) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)
\end{aligned}$$

Note-se que esta solução é C^∞ para $t > 0$, e contínua para $0 < x < 1$ e $t = 0$, mas descontínua nos pontos $(x,t) = (0,0)$ e $(x,t) = (1,0)$ porque a condição inicial não é compatível com as condições fronteira.

2. Seja a função f definida no intervalo $(0,\pi)$ por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

   (a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.

   (b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi,\pi]$.

   (c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ x \in]0,\pi[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Resolução:

(a) A série pretendida é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

com

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\operatorname{sen}((n+1)x) - \operatorname{sen}((n-1)x)\right)dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} & \text{se} \quad n \neq 1 \\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} & \text{se} \quad n = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos((n+1)\pi)+1}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\pi)-1}{n-1}\right) & \text{se} \quad n \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad n = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) & \text{se} \quad n \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad n = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{-2}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1} & \text{se} \quad n \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad n = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos(nx),$$

ou ainda

$$= \frac{2}{\pi}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4n^2-1}\cos(2nx)\right).$$

(b) Temos que a série de senos calculada é a série de Fourier da função

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \in [0,\pi] \\ \operatorname{sen}(-x) & \text{se} \quad x \in [-\pi, 0] \end{cases}.$$

O prolongamento periódico de $g(x)$ é a função $|\operatorname{sen} x|$ que está definida em $\mathbb{R}$, é contínua e seccionalmente monótona. Concluímos então que

$$\frac{2}{\pi}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4n^2-1}\cos(2nx)\right) = |\operatorname{sen} x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Procurando soluções separadas $v(x,t) = X(x)\,T(t)$ do problema linear homogéneo

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + 2v, \;\; x \in \,]0,\pi[\\ v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0 \end{cases},$$

obtemos

$$XT' = X''T + 2XT,$$

pelo que

$$\lambda = \frac{T'}{T} - 2 = \frac{X''}{X}$$

é constante. Temos então

$$T' = (2 + \lambda) T,$$

e

$$X'' = \lambda X \quad \text{com} \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Determinando soluções X não triviais deste problema, vem

i. Se $\lambda = 0$, resolvendo $X'' = 0$, vem $X = Ax + B$. Donde $X' = A$. Como $X'(0) = X'(\pi) = 0$, obtemos $X = B$, ou seja temos as soluções constantes.

ii. Se $\lambda \neq 0$, resolvendo $X'' = \lambda X$, vem $X = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Donde $X' = \sqrt{\lambda}\left(Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right)$. Como $X'(0) = X'(\pi) = 0$, obtemos

$$A - B = 0 \quad \text{e} \quad Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} - Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0.$$

Portanto $A = B$ e $e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = 1$ (para $A \neq 0$). Concluímos que apenas existem soluções não triviais se $2\sqrt{\lambda}\pi = in2\pi$, ou seja

$$\lambda = -n^2 \quad \text{com } n \text{ inteiro,}$$

sendo as soluções correspondentes

$$\begin{aligned} X &= A\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) \\ &= \frac{A}{2}\cos(nx). \end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária.

Obtivemos então a solução e^{2t} (correspondente à solução constante para $\lambda = 0$), e as soluções

$$e^{\left(2-n^2\right)t}\cos(nx).$$

Fazendo combinações lineares destas soluções chegamos a

$$u(x,t) = \frac{a_0 e^{2t}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\left(2-n^2\right)t}\cos(nx).$$

Finalmente atendendo à condição inicial e às alíneas anteriores, obtemos a solução

$$u(x,t) = \frac{2e^{2t}}{\pi}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2e^{-4n^2t}}{4n^2-1}\cos(2nx)\right).$$

3. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0 \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é um parâmetro real.

Resolução (muito sumária):

Pelo método da separação de variáveis vem

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos(n\pi ct) + B_n \operatorname{sen}(n\pi ct) \right) \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Da condição inicial

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x) = 0,$$

concluímos $A_n = 0$ para todo n. Então derivando formalmente $u(t,x)$ em ordem a t vem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c B_n \cos(n\pi ct) \operatorname{sen}(n\pi x),$$

pelo que a segunda condição inicial fica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c B_n \operatorname{sen}(n\pi x) = 1.$$

Então

$$n\pi c B_n = 2 \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = \frac{\cos(n\pi) - 1}{-n\pi},$$

ou seja

$$B_n = \frac{2\left(1 - (-1)^n\right)}{n^2 \pi^2 c}.$$

Portanto a solução é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(1 - (-1)^n\right)}{n^2 \pi^2 c} \operatorname{sen}(n\pi ct) \operatorname{sen}(n\pi x).$$

4. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$.

Resolução (muito sumária):

Vamos dividir o problema na soma de dois mais simples:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y}(x,1) = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}(1,y) = 0. \end{cases}$$

Recorrendo ao método da separação de variáveis obtemos

$$u_1(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{ch}(n\pi x)\cos(n\pi y),$$

e de forma semelhante u_2, já que $u_2(x,y) = u_1(y,x)$.

Portanto, usando a condição $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y)$, temos, a menos de uma constante aditiva:

$$u_1(x,y) = \frac{\operatorname{ch}(2\pi x)\cos(2\pi y)}{2\pi \operatorname{sh}(2\pi)} \qquad \text{e} \qquad u_2(x,y) = \frac{\operatorname{ch}(2\pi y)\cos(2\pi x)}{2\pi \operatorname{sh}(2\pi)}.$$

Pelo que a solução pretendida é

$$u(x,y) = c + \frac{\operatorname{ch}(2\pi x)\cos(2\pi y) + \operatorname{ch}(2\pi y)\cos(2\pi x)}{2\pi \operatorname{sh}(2\pi)},$$

onde c é uma constante arbitrária.

5. (a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, \pi[$).

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x)x \ .$$

Resolução:

(a) Pelo método de separação de variáveis, procuram-se soluções, da equação diferencial parcial com condições fronteira, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, para as quais

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(T(t)X(x)\right) = T'(t)X(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T(t)X(x)\right) = T(t)X''(x).$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, fica

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) - T(t)X(x) \iff \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k (porque o membro esquerdo não depende de x, o membro direito não depende de t e eles têm que ser iguais).

A solução geral de $T'(t) = (k-1)\,T(t)$ é $T(t) = ce^{(k-1)t}$ com $c \in \mathbb{R}$.

A solução geral de $X''(x) + kX(x) = 0$ é

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x} & \text{se } k \neq 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } k = 0 \end{cases}.$$

Para que a condição na fronteira, $T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0$, seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ ou $X(\pi) \neq 0$, teria que ser $T(t) = 0$, $\forall t$). Quando $k = 0$, a única solução $X(x)$ que satisfaz esta condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesse caso,

$$X(0) = X(\pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0 \ .$$

Quando $k \neq 0$, a condição $X(0) = 0$ impõe $c_1 = -c_2$ e depois a condição $X(\pi) = 0$ impõe, a uma solução não identicamente nula, que

$$e^{\sqrt{k}\pi} - e^{-\sqrt{k}\pi} = 0,$$

ou seja $e^{2\sqrt{k}\pi} = 1$. Esta condição pode ser satisfeita desde que

$$2\sqrt{k}\pi = 2n\pi i \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja,

$$k = -n^2 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

obtendo-se nestes casos

$$X(x) = c_1 \left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = 2ic_1 \operatorname{sen}(nx)$$

Chega-se assim que todas as seguintes funções são soluções para o problema de valor na fronteira dado:

$$u_n(t,x) = \underbrace{e^{-(1+n^2)t}}_{T(t)} \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{X(x)} \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0, \pi]$. Por linearidade, qualquer combinação linear finita destas soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, u_n(t,x)$$

é uma solução formal.

(b) Para que a solução geral da forma acima satisfaça a condição inicial $u(0,x) = (\pi - x)x$, tem que se ter

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(0,x) = (\pi - x)x \ , \text{ ou seja, } \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) = (\pi - x)x \ .$$

Para encontrar as constantes b_n adequadas, desenvolve-se a função $(\pi - x)x$ em série de senos. Isso é equivalente a estender esta função ao intervalo $[-\pi, \pi]$ como função ímpar, e desenvolver a extensão em série de Fourier. Os coeficientes da série são

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)x \operatorname{sen}(nx) \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[(\pi - x)x \tfrac{\cos(nx)}{-n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \cos(nx) \, dx \\
&= \frac{2}{\pi n} \left[(\pi - 2x) \tfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \, dx \\
&= \frac{4}{n^3 \pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{8}{n^3 \pi} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, a solução pretendida é

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{8}{n^3 \pi} e^{-(1+n^2)t} \operatorname{sen}(nx) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^3 \pi} e^{-\left(1+(2n+1)^2\right)t} \sin((2n+1)x) \ .$$

6. Seja f a função definida no intervalo $]0, 2\pi[$ por $f(x) = x$.

   (a) Determine a série de cosenos da função f.

   (b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \ x \in]0, 2\pi[\\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Resolução (sumária):

(a) A série pretendida é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

com (para $n = 0$)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{(2\pi)^2}{4\pi} = \pi$$

e para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos\left(\frac{n}{2}x\right) dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)}{\frac{n}{2}}\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) dx\right) \\ &= \frac{-2}{\pi n}\left[\frac{-\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\frac{n}{2}}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right) \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right). \end{aligned}$$

Portanto a série é

$$\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right),$$

ou ainda

$$\pi - \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

(b) Procurando soluções separadas $u = X(x)T(t)$ da parte homogénea do problema chegamos sucessivamente a

$$XT' = X''T - tXT,$$

$$\frac{T'}{T} + t = \frac{X''}{X} = \lambda \qquad \text{constante},$$

$$T' = (\lambda - t)T, \qquad T = ce^{\lambda t - \frac{t^2}{2}},$$

$$X'' = \lambda X \quad \text{com} \quad X'(0) = X'(2\pi) = 0,$$

$$\lambda = -\frac{n^2}{4} \quad \text{e} \quad X(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right), \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Obtemos assim

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 t}{4}-\frac{t^2}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Pela condição inicial, para $x \in]0, 2\pi[$, e atendendo à alínea anterior

$$u(x,t) = \pi e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} e^{-\frac{n^2+2t}{4}t} \cos\left(\frac{n}{2}x\right).$$

7. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0,t) = x \ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0 \ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos(2\pi\,(x-y)) - \cos(2\pi\,(x+y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

Resolução: (muito sumária)

Procurando uma solução v que não dependa de t e que satisfaça as condições fronteira, obtemos $v(x,y) = x$.

Pelo que se definirmos $\omega(t,x,y) = u(t,x,y) - x$, esta função ω satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \\ \omega(t,x,0) = 0 \ , \quad \omega(t,x,1) = 0 \\ \omega(t,0,y) = 0 \ , \quad \omega(t,1,y) = 0 \\ \omega(0,x,y) = 0. \end{cases}$$

Usando o método da separação de variáveis para resolver este último problema, chegamos à seguinte solução formal:

$$\omega(t,x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} c_{m,n} \sin(\sqrt{(m^2+n^2)}\pi t)\, \sin(m\pi x)\, \sin(n\pi y).$$

Atendendo que $\cos(2\pi\,(x-y)) - \cos(2\pi\,(x+y)) = 2\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$, vem

$$u(t,x,y) = x + \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sin(\sqrt{8}\pi t)\, \sin(2\pi x)\, \sin(2\pi y).$$