Análise Matemática IV

2º semestre de 2002/2003

Exercício-teste 1 - a apresentar na 2ª aula prática

(1) Determine todas as soluções da equação:

$$z^6 = (i+2)^3 + \frac{1-28i}{2-i}$$

(2) Descreva a região complexa

$$|z-i| \leq c|z|$$

onde c é um número real positivo.

Resolução:

(1) Desenvolvendo o segundo membro da equação, obtem-se

$$\begin{aligned} (i+2)^3 + \frac{1-28i}{2-i} &= i^3 + 6i^2 + 12i + 8 + \frac{(1-28i)(2+i)}{5} \\ &= -i - 6 + 12i + 8 + \frac{1}{5}(2 + i - 56i + 28) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$z^6 = (i+2)^3 + \frac{1-28i}{2-i} \Leftrightarrow z^6 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{8e^{i0}}$$

e as soluções são $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}k}$, com $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

(2) Se $c = 1$, a equação $|z-i| \leq |z|$ define o semi-plano $\mathrm{Im}\, z \geqslant \frac{1}{2}$.

Se $c \neq 1$, fazendo $x + iy = z$, vem

$$\begin{aligned}
|z - i| &\leqslant c\,|z| \Leftrightarrow |z-i|^2 \leqslant c^2\,|z|^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \leqslant c^2\left(x^2+y^2\right) \\
&\Leftrightarrow \left(1-c^2\right)\left(x^2+y^2-\frac{2y}{1-c^2}+\left(\frac{1}{1-c^2}\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{1-c^2}-1 \\
&\Leftrightarrow \left(1-c^2\right)\left(x^2+\left(y-\frac{1}{1-c^2}\right)^2\right) \leqslant \frac{c^2}{1-c^2}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, se $0 < c < 1$, a equação define um círculo de raio $\frac{c}{1-c^2}$ e centro no ponto $\frac{i}{1-c^2}$ (incluindo a fronteira); e se $c > 1$, então temos definido o exterior de um círculo de raio $\frac{c}{c^2-1}$ e centro no ponto $\frac{i}{1-c^2}$, incluindo a fronteira.