Análise Matemática IV

2º semestre de 2002/2003

Exercício-teste 2 - a apresentar na 3ª aula prática

(1) Resolva a equação

$$e^z = e^{iz}$$

apresentando as soluções na forma algébrica.

(2) Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = z(z^2 - \overline{z}^2 - |z|^2)$$

e sejam u, v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$u(x,y) = \mathrm{Re}[g(x+iy)] \quad \text{e} \quad v(x,y) = \mathrm{Im}[g(x+iy)]$$

Determine o conjunto dos pontos onde u, v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

Resolução:

(1) Por exemplo

$$e^z = e^{iz} \Leftrightarrow e^{(1-i)z} = 1 \Leftrightarrow (1-i)z = 2k\pi i \; k \in \mathbb{Z}$$

pelo que as soluções da equação são

$$z = \frac{2k\pi i}{1-i} = \frac{2k\pi i(1+i)}{2} = -k\pi + k\pi i \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(2) Sendo

$$\begin{aligned} g(z) &= g(x+iy) = (x+iy)((x+iy)^2 - (x-iy)^2 - (x^2+y^2))) \\ &= (x+iy)(-x^2 - y^2 + 4xyi) \\ &= -x^3 - 5xy^2 + i(3x^2y - y^3) \end{aligned}$$

tem-se que

$$u(x,y) = -x^3 - 5xy^2 \quad \text{e} \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

Para que se verifiquem as equações de Cauchy-Riemann é necessário que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 - 5y^2 = 3x^2 - 3y^2 \\ -10xy = -6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que o único ponto onde as equações de Cauchy-Riemann se verificam é $z = 0$. Assim, e dado que as derivadas parciais de u e v são contínuas em $\mathbb{R}^2$, podemos afirmar que a derivada de g existe apenas em $z = 0$, pelo que o domínio de analiticidade de g é vazio.