Análise Matemática IV

Exercício Teste 3

1. Seja $f(z)$ a função dada por:

$$f(x+iy) = \begin{cases} 1 & \text{se } y < 0, \\ 4y & \text{se } y \geq 0, \end{cases}$$

e seja C o contorno de $-1-i$ a $1+i$ alongo a curva $y = x^3$. Calcule $\int_C f(z)\,dz$.

Resolução. Para obter uma parametrização de C considere-se $\gamma(t) = t + it^3$ para $-1 \leq t \leq 1$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_\gamma f(z)dz \\
&= \int_{-1}^{1} f(t+it^3)(1+i3t^2)\,dt \\
&= \int_{-1}^{0} 1\cdot(1+i3t^2)\,dt + \int_0^1 4(t^3)(1+i3t^2)\,dt \\
&= (t+it^3)\Big|_{-1}^{0} + (t^4+i2t^6)\Big|_0^1 \\
&= 0-(-1-i)+1+i2 \\
&= 2+i3.
\end{aligned}$$

2. Para m e n inteiros, cacule $\int_C z^m \bar{z}^n\,dz$, onde C é o contorno $|z| = 1$ percorrida no sentdo postivo.

Resolução. Se $|z| = 1$, então $\bar{z} = z^{-1}$. Logo

$$\int_{|z|=1} z^m \bar{z}^n\,dz = \int_{|z|=1} z^{m-n} dz.$$

Uma parametrização de C é $\gamma(\theta) = \exp i\theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_C z^m \bar{z}^n\,dz &= \int_C z^{m-n}\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} (\exp i\theta)^{m-n}\, i \exp i\theta\, d\theta \\
&= \begin{cases} 2\pi i & \text{se } m-n = -1, \\ \frac{\exp i(m-n+1)\theta}{m-n+1}\Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{se } m-n \neq -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

3. Sejam $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Calcule

$$\int_C (z - z_0)^{a-1}\, dz,$$

onde C é o contorno $|z - z_0| = R$ percorrida no sentdo postivo com $R > 0$ e $(z - z_0)^{a-1}$ é a função obtido pelo ramo principal $-\pi < \arg z < \pi$ de função $\log z$.

Resolução. Uma parametrização de C é $\gamma(\theta) = z_0 + R\exp i\theta$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Portanto

$$\begin{aligned}
\int_C (z - z_0)^{a-1}\, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} (R\exp i\theta)^{a-1} iR\exp i\theta\, d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-1)\log(R\exp i\theta)} iR\exp i\theta\, d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-1)(\log(R)+i\theta)} iRe^{i\theta}\, d\theta \\
&= iRe^{(a-1)\log R} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ia\theta}\, d\theta \\
&= iR^a \left.\frac{e^{ia\theta}}{ia}\right|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{R^a}{a}\left(e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}\right) \\
&= i2\operatorname{sen}(a\pi)\frac{R^a}{a}.
\end{aligned}$$