Análise Matemática IV

2º semestre de 2002/2003

Exercício-teste 4 - a apresentar na 5ª aula prática

(1) Determinar os valores possíveis do integral

$$\oint_\gamma \frac{z}{z^4-1}dz$$

em que

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-\alpha| = \alpha\}$$

percorrida uma vez e $\alpha > 1$.

(2) Considere $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = 2\,\mathrm{sen}\, x \cdot \mathrm{sh} y$$

(a) Mostre que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que é inteira, $\mathrm{Re}\, f = u$ e $f(0) = 2i$.

Resolução:

(1) Defina-se

$$g(z) = \frac{z}{z^4-1}$$

Por ser uma função racional, g é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z : z^4 - 1 = 0\}$. Visto

$$z^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{1} \quad \Leftrightarrow \quad z = e^{i\frac{k\pi}{2}}\ ,\ k = 0,1,2,3$$

conclui-se que g é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-1,1,-i,i\}$. Por α ser um número real maior que 1, é fácil de observar que

$$|1-\alpha| = \alpha - 1 < \alpha \quad \text{e} \quad |-1-\alpha| = \alpha + 1 > \alpha$$

Por outro lado

$$|\alpha - i| = \sqrt{\alpha^2+1} > \alpha \quad \text{e} \quad |\alpha + i| = \sqrt{\alpha^2+1} > \alpha$$

Podemos então escrever

$$g(z) = \frac{\frac{z}{(z^2+1)(z+1)}}{z-1} \equiv \frac{f(z)}{z-1}$$

em que f é analítica na região $\{z : |z-\alpha| \leq \alpha\}$. Por aplicação directa da Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{z}{z^4-1} dz = 2\pi i f(1) = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

(2) (a) Verifica-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x \,\mathrm{sh} y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\sin x \,\mathrm{sh} y$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\sin x \,\mathrm{ch} y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\sin x \,\mathrm{sh} y$$

Sendo assim

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\sin x \,\mathrm{sh} y + 2\sin x \,\mathrm{sh} y = 0$$

para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pelo que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Definindo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ em que u é a função dada, teremos que determinar v de modo a que f seja uma função inteira, isto é, de modo a que se verifiquem as condições de Cauchy-Riemann para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Assim

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 2\cos x \,\mathrm{sh} y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -2\sin x \,\mathrm{ch} y \end{cases}$$

Primitivando a primeira igualdade em ordem a y, obtem-se

$$v(x,y) = 2\cos x \,\mathrm{ch} y + c(x)$$

e substituindo na segunda igualdade

$$2\sin x\,\mathrm{ch}y + c'(x) = 2\sin x\,\mathrm{ch}y$$

pelo que $c(x) = c$ onde c é uma constante real. Temos então que

$$f(x+iy) = 2\sin x\,\mathrm{sh}y + i(2\cos x\,\mathrm{ch}y + c)$$

Atendendo a que $f(0) = 2i$ conclui-se que $c = 0$, pelo que a função pedida é

$$f(x+iy) = 2\sin x\,\mathrm{sh}y + i2\cos x\,\mathrm{ch}y$$