Análise Matemática IV

2º semestre de 2002/2003

Exercício-teste 5

1. Calcule o seguinte integral

$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz,$$

onde C é a elipse $|z-1| + |z+1| = 3$, percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

Sendo a função $\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ a divisão de duas funções analíticas, as suas únicas singularidades serão quando $\operatorname{sen}(\pi z) = 0$, ou seja para os valores $z = k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Destas singularidades, apenas $z = -1$, $z = 0$ e $z = 1$, se encontram na região delimitada pela elipse $|z-1| + |z+1| = 3$. Por outro lado facilmente se reconhece que a função $z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2}$ também é analítica em todo o seu domínio, ou seja é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Pelo Teorema dos resíduos temos

$$\begin{aligned}
\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz &= \oint_C \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)}\, dz + \oint_C z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2}\, dz \\
&= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + \operatorname*{Res}_{z=1} \left(z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to \pm 1} (z \mp 1) \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} &= \lim_{z \to \pm 1} \frac{(z \mp 1)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \lim_{z \to \pm 1} z^2 \\
&= \lim_{z \to \pm 1} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} \\
&= \frac{-1}{\pi},
\end{aligned}$$

o que mostra que $z=-1$ e $z=1$ são pólos simples de $\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ e

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{-1}{\pi}.$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} &= \lim_{z\to 0} \frac{z}{\pi} \lim_{z\to 0} \frac{\pi z}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

que mostra que $z=0$ é uma singularidade removível de $\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ e $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} = 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} &= (z-1+1)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{(z-1)^2} \right)^{2k+1} \\ &= \left((z-1)^2 + 2(z-1) + 1 \right) \left(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-1)^6} + \cdots \right) \\ &= 1 + \frac{2}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-1)^4} + \cdots, \end{aligned}$$

pelo que

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \left(z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) = 2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz &= 2\pi i \left(-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + 2 \right) \\ &= 4i(\pi - 1). \end{aligned}$$

2. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Resolução:

Temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\, dx$$

porque sendo $\frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2}$ uma função ímpar vem $\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2}\, dx = 0$.

Seja C_R a semicircunferência $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ (orientada do ponto $z = R$ para o ponto $z = -R$); $I_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = 0\}$ o segmento de recta orientado de $z = -R$ e $z = R$; e Γ_R a concatenação das curvas orientadas I_R e C_R (sendo portanto uma curva fechada simples orientada no sentido positivo). Vem

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{I_R} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}\, dz \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left(\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}\, dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}\, dz \right).
\end{aligned}$$

então, notando que estamos nas condições do Lema de Jordan, uma vez que

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{1}{(1+z^2)^2} = 0 \quad \text{e} \quad e^{iz} = e^{i\alpha z} \text{ com } \alpha = 1 > 0,$$

obtemos pelo Teorema dos Resíduos,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx &= \oint_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}\, dz \\
&= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{z\to i} (z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} = \frac{-1}{4e},$$

concluímos que $z = i$ é um pólo de segunda ordem de $\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$ e portanto

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \\
&= \lim_{z\to i} \left(\frac{ie^{iz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z+i)^3} \right) \\
&= \frac{ie^{-1}}{(i+i)^2} - \frac{2e^{-1}}{(i+i)^3} \\
&= \frac{-i}{4e} - \frac{i}{4e} \\
&= \frac{-i}{2e}
\end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx &= 2\pi i \frac{-i}{2e} \\
&= \frac{\pi}{e}
\end{aligned}$$