Análise Matemática IV

Teste 6- Resolução

Semana 6

1. Obtenha a solução geral de:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{t}{1+t^2}y = 0.$$

Trata-se de uma equação linear homogénea, com $a(t) = \frac{t}{1+t^2}$.
Multiplicando a equação por

$$\mu(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{s}{1+s^2}\, ds\right) = \exp(\frac{1}{2}\log(1+t^2)) = (1+t^2)^{\frac{1}{2}},$$

obtemos:

$$\frac{d}{dt}((1+t^2)^{\frac{1}{2}}y) = 0,$$

e a solução geral da equação é:

$$y = C(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Obtenha a solução geral do p.v.i.

$$\frac{dy}{dt} + \frac{t}{1+t^2}y = (\sqrt{1+t^2})e^t,$$
$$y(0) = 1.$$

Atendendo à questão anterior, temos, após multiplicação pelo factor integrante $\mu(t)$:

$$\frac{d}{dt}((1+t^2)^{\frac{1}{2}}y = (1+t^2)e^t.$$

Integrando a equação entre 0 e t, obtemos:

$$\begin{aligned}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}y(t) - 1 &= \int_0^t (1+s^2)e^s\, ds \\ &= t^2e^t - 2e^t(t-1) + e^t - 3.\end{aligned}$$

Logo, a solução do p.v.i., é:

$$y(t) = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\left[t^2e^t - 2e^t(t-1) - 2\right].$$

3. Obtenha a solução geral do p.v.i.

$$(\sin y \cos t)\frac{dy}{dt} = \cos y \sin t,$$

$$y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Verifique a solução que obteve, e conclua que o intervalo máximo de definição da solução é $\mathbb{R}$.

Trata-se de uma equação separável, que pode ser escrita como:

$$\tan y \frac{dy}{dt} = \tan t.$$

Integrando entre 0 e t, obtemos:

$$-\log|\cos y(t)| + \log(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\log|\cos t|,$$

ou seja, após simplificação e aplicando a exponencial,

$$|\cos y(t)| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\cos t|.$$

Atendendo à condição inicial, a solução é portanto:

$$y(t) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t).$$

Note-se que a integração efectuada só é válida para $t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. No entanto, como $|\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t| < 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$, a função $y(t)$ está bem definida para todo o $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como $y(t) \in [\pi, \pi]$, temos que:

$$\sin y(t) = +\sqrt{1 - \cos^2 y(t)} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 t}{2}},$$

e que:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 t}{2}}}.$$

Estas duas igualdades juntamente com a relação entre $\cos y(t)$ e $\cos t$, permitem verificar que a função $y(t)$ satisfaz a equação para todo o $t \in \mathbb{R}$.