Análise Matemática IV

2º semestre de 2002/2003

Exercício-teste 7 - a apresentar na 8ª aula prática

(1) Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} - y = ty^5$$

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = y^{-4}$.

(2) Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y(x^2y^2 + 2) + x(2 - 2x^2y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(2) = 1$$

(a) Verifique que a equação não é exacta.

(b) A equação é redutível a exacta, admitindo um factor integrante da forma

$$\mu(x,y) = x^p y^r \ .$$

Determine p e r, e resolva o PVI, apresentando uma equação que define implicitamente a solução.

Resolução:

(1) Começamos por notar que a função nula, $y(t) \equiv 0$, é solução da equação. Por outro lado, se $y(t) \neq 0$, dividindo ambos os membros da equação por y^5 obtem-se

$$\frac{1}{y^5}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{y^4} = t$$

Seguindo a sugestão, se $v = y^{-4}$, tem-se $\frac{dv}{dt} = -4y^{-5}\frac{dy}{dt}$, pelo que $\frac{1}{y^5}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}$. Substituindo na equação obtem-se

$$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dt} - v = t$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{dv}{dt} + 4v = -4t \tag{1}$$

Trata-se de uma equação linear de primeira ordem, que admite como factor de integração

$$\mu(t) = e^{\int 4dt} = e^{4t}$$

Multiplicando os termos de (1) por e^{4t}, obtem-se

$$\frac{d}{dt}(e^{4t}v) = -4te^{4t}$$

pelo que

$$e^{4t}v = -\int 4te^{4t}dt = -te^{4t} + \frac{e^{4t}}{4} + c$$

o que é equivalente a

$$v(t) = -t + \frac{1}{4} + ce^{-4t}$$

Finalmente, conclui-se que a solução geral da esquação diferencial é dada por $y(t) \equiv 0$, ou por

$$y(t) = \pm(v(t))^{-1/4} = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{-t + \frac{1}{4} + ce^{-4t}}}\,.$$

(2) (a) Definindo

$$M(x,y) = y(x^2y^2 + 2) \qquad \text{e} \qquad N(x,y) = x(2 - 2x^2y^2)$$

tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 - 6xy^2$$

e é óbvio que a equação não é exacta.

(b) Atendendo ao que é dito, a equação

$$x^{p+2}y^{r+3} + 2x^py^{1+r} + (2x^{p+1}y^r - 2x^{p+3}y^{r+2})\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, pelo que

$$(r+3)x^{p+2}y^{r+2}+2(r+1)x^py^r=2(p+1)x^py^r-2(p+3)x^{p+2}y^{r+2} \quad , \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

isto é

$$x^py^r\Big((r+2p+9)x^2y^2+2(r-p)\Big)=0 \quad , \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

o que implica que

$$r+2p+9=0 \quad , \quad r-p=0$$

concluindo-se finalmente que $r=p=-3$, pelo que

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^3y^3}$$

Multiplicando todos os termos da equação por $\mu(x,y)$, obtem-se

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2}+(\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y})\frac{dy}{dx}=0$$

que é por hipótese uma equação exacta, pelo que existe uma função $\Phi(x,y)$, verificando

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y}$$

e tal que $\Phi(x,y)=0$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para determinar Φ,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x,y)=\int\Big(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2}\Big)dx+C(y)$$

ou seja

$$\Phi(x,y)=\log x-\frac{1}{x^2y^2}+C(y)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\log x-\frac{1}{x^2y^2}+C(y)\Big)=\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y}$$

pelo que

$$C'(y) = -\frac{2}{y} \quad \Leftrightarrow \quad C(y) = -2\log y + C$$

e finalmente

$$\Phi(x,y) = \log x - 2\log y - \frac{1}{x^2y^2} + C$$

Como foi referido

$$\log x - 2\log y - \frac{1}{x^2y^2} + C = 0$$

define implicitamente a solução geral da equação numa vizinhaça de pontos que verifiquem a condição $N(x,y) \neq 0$. Pela condição inicial $y(2) = 1$, obtem-se $C = \frac{1}{4} - \log 2$, e atendendo a que $N(2,1) = -12 \neq 0$, tem-se que

$$\log x - 2\log y - \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{4} - \log 2 = 0$$

define implicitamente a solução da equação diferencial numa vizinhança de $x_0 = 2$.